

Lib. ( This material is restricted in use and cannot be quoted by title or abstract for propaganda purposes or in the popular press. Quotation of titles and abstracts in publications of purely technical or scientific nature is not prohibited. )

JUL 27 1949

5. FOLGE, 1943, BAND 43, HEFT 5

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 435. Band

Kuratorium:

W. Gerlach    F. Paschen    M. Planck  
R. W. Pohl    A. Sommerfeld

Unter Mitwirkung  
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft  
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.  
M. PLANCK, Berlin

Mit 28 Abbildungen im Text

( Reproduced and Distributed in the Public Interest by  
THE ALIEN PROPERTY CUSTODIAN )

LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Redaktionsschluß am 23. Oktober 1943

Reprinted by EDWARDS BROTHERS, INC., ANN ARBOR, MICHIGAN, U.S.A.

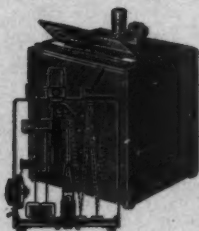
## Inhalt

	Seite
Herbert Buchholz-Berlin, Der Hohlleiter von kreisförmigem Querschnitt mit geschichtetem dielektrischem Einsatz. (Mit 19 Abbildungen)	313
W. O. Schumann-München, Plasmaerscheinungen bei plötzlichen Stößen. (Mit 7 Abbildungen)	369
F. Goos und H. Hänchen-Hamburg, Über das Eindringen des total-reflektierten Lichtes in das dünnere Medium. (Mit 2 Abbildungen)	383

## Knochen

enthalten auch nach der Haushaltsverwertung noch Ausgangspunkte für 80 wichtige Indusriefunkte. Darum: nicht verbrennen oder verfüttern, sondern dem nächsten Schulkind mitgeben!

## Multiflex-Galvanometer



Das neue Universalinstrument für die Messung und Registrierung kleiner Ströme ab  $5 \times 10^{-10}$  A

Verlangen Sie unsere Druckschriften

Spezialfabrik lichtelektrischer Zellen und Apparate

**DR. B. LANGE**

BERLIN • Telegrammadresse: Photozelle Berlin



## DR. CARL LEISS · BERLIN

### Physikalisch-optische Instrumente

Spiegel-Doppel-Monochromatoren mit Quarz-, Steinsalz- und Flintprismen

Monochromatoren für das sichtbare, ultraviolette und ultrarote Gebiet  
Spektralapparate, Spektrometer, Spektrographen mit Glas-, Quarz- und Fluorit-Optik

Röntgen-Spektrographen und Röhren nach Prof. M. Siegbahn  
Linsen und Prismen aus Glas, Quarz, Quarzglas und Fluorit usw.

tte

13

69

83

d

so

A





# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 43 • HEFT 5 • 1943

## *Der Hohlleiter von kreisförmigem Querschnitt mit geschichtetem dielektrischem Einsatz*

Von Herbert Buchholz

(Mit 19 Abbildungen)

(Mitteilung aus dem Zentrallaboratorium für Fernmeldetechnik der AEG)

### 1. Veranlassung und zweck der Arbeit

Ein Hohlleiter von kreisförmigem Querschnitt, dessen metallische Leiterwandung als vollkommen leitend angesehen werden darf und der mit einem einheitlichen Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_0$  angefüllt ist, ist bekanntlich für den Durchgang ungedämpfter elektromagnetischer Wellen nur für solche auf das Vakuum  $\epsilon, \mu$  bezogene Wellenlängen  $\lambda$  der aufgedrückten Schwingung durchlässig, für die der Radikand des Wurzelausdrucks (1,1) eine

$$(1,1) \quad \left\{ \left\{ k_0^2 - \left( \frac{j}{b} \right)^2 \right\}^{1/2} - \left\{ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{\epsilon_0}{\epsilon} - \left( \frac{j}{b} \right)^2 \right\}^{1/2} \right\} = \gamma = \alpha + i\beta$$

mit  $\alpha \geq 0$  und  $\beta = 0$

positiv reelle Zahl ist. Dabei ist in (1,1) abgesehen von den Formelzeichen, die ohnehin in der nachstehenden Zusammenstellung aufgezählt sind für eine

$$\begin{aligned} TM_{np}\text{-Welle} & \quad j = j_{pn} \quad \text{mit} \quad J_p(j_{pn}) = 0 \\ TE_{np}\text{-Welle} & \quad j = j'_{pn} \quad \text{mit} \quad J'_p(j'_{pn}) = 0 \end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned} \lambda_{np}^{(m)} &= \frac{2\pi b}{j_{pn}} \cdot \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right)^{1/2}, \\ \lambda_{np}^{(e)} &= \frac{2\pi b}{j'_{pn}} \cdot \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

so daß sich für die kritischen Wellenlängen  $\lambda_{np}^{(m)}$  und  $\lambda_{np}^{(e)}$  der beiden Wellentypen, die den Radikanden gerade zu Null machen, die oben angegebenen Beziehungen errechnen. Man hat also in der Wahl eines  $\epsilon_0 > \epsilon$  jederzeit ein Mittel, die kritische Wellenlänge in einem gewissen Umfang heraufzusetzen. Da nun aber jedes dielektrische Material zugleich einen von Null verschiedenen Verlustwinkel besitzt,

so vergrößert man durch diese Maßnahme gleichzeitig die Dämpfung des Hohlleiterkabels.

Die Berechnung dieser dielektrischen Komponente der Dämpfung gestaltet sich äußerst einfach, wenn an der Auffüllung des Hohlleiterinneren nur ein einziges derartiges Dielektrikum beteiligt ist. Man hat dann nämlich nur nötig, in dem Radikanden (1,1), der bekanntlich als Faktor von  $i \cdot z$  in dem Exponenten

$$\exp \left\{ i \cdot \left( z \cdot \sqrt{k_0^2 - \left( \frac{j}{b} \right)^2} - \omega t \right) \right\} = \exp \{ i(\gamma z - \omega t) \}$$

auftritt und demnach das Fortpflanzungsmaß der Hohlleiterwelle darstellt, an Stelle von  $\epsilon_0$  die Größe  $\epsilon_0 \cdot (1 + i \cdot \operatorname{tg} \delta_0)$  zu setzen. Für ein verlustbehaftetes Dielektrikum wird dadurch das Fortpflanzungsmaß  $\gamma_D = \alpha_D + i\beta_D$  eine komplexe Zahl, und zwar erhält man mit  $\alpha$  als Wellenzahl des verlustfreien Dielektrikums

$$(1,2) \quad \alpha_D = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \left[ \alpha^4 + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \cdot \left( \frac{\epsilon_0}{s} \right)^3 \cdot \operatorname{tg}^2 \delta_0 \right]^{1/2} + \alpha^2 \right\}^{1/2} \approx \alpha,$$

$$(1,3) \quad \beta_D = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left\{ \left[ \alpha^4 + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^4 \cdot \left( \frac{\epsilon_0}{s} \right)^3 \cdot \operatorname{tg}^2 \delta_0 \right]^{1/2} - \alpha^2 \right\}^{1/2} \quad N/\text{cm}.$$

Da  $\operatorname{tg} \delta$  stets nur eine kleine Zahl in der Größenordnung von  $10^{-4}$  ist, so stimmt die Wellenzahl eines verlustbehafteten Dielektrikums praktisch mit der eines verlustfreien Dielektrikums überein, solange  $\alpha^2$  genügend größer als null ist. Für die Dämpfung  $\beta_D$  ergeben sich wegen der Kleinheit von  $\operatorname{tg} \delta$  die folgenden Näherungsformeln: Es ist

$$(1,3a) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_D &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{s}}}{\sqrt{1 - \left( \frac{j \cdot \lambda}{2\pi b} \right)^2 \cdot \frac{s}{\epsilon_0}}} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda_r}{\lambda} \cdot \frac{\epsilon_0}{s} \cdot \operatorname{tg} \delta_0, \\ &\text{falls } 1 - \left( \frac{j \cdot \lambda}{2\pi b} \right)^2 \cdot \frac{s}{\epsilon_0} > \operatorname{tg} \delta_0, \end{aligned} \right.$$

$$(1,3a_1) \quad \beta_D \rightarrow \frac{\pi}{\lambda} \cdot \left( \frac{\epsilon_0}{s} \right)^{1/2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{1}{2} k_0 \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \quad \text{für } \lambda \rightarrow 0,$$

$$(1,3c) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_D &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{j}{b} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \delta_0} & \text{für } \lambda = \frac{2\pi b}{j} \cdot \left( \frac{\epsilon_0}{s} \right)^{1/2} \\ & & \text{oder } \alpha = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(1,3d) \quad \beta_D \rightarrow \frac{j}{b} \cdot \sqrt{1 - \left( \frac{2\pi b}{\lambda \cdot j} \right)^2 \cdot \frac{\epsilon_0}{s}} \quad \text{für } \lambda \rightarrow \infty \text{ und } \alpha^2 > 0.$$

Dabei möge an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß die Wellenlänge  $\lambda_r$  der Hohlleiterwelle in Gl. (1,3a) stets verschieden ist von der aufgedruckten Vakuumwellenlänge  $\lambda$ . Wegen  $\lambda_r = 2\pi/\alpha$  ist nämlich im jetzigen Falle nach Gl. (1,1)

$$(1,4) \quad \lambda_r = \lambda \cdot \sqrt{\frac{s}{\epsilon_0} \cdot \left\{ 1 - \left( \frac{j \lambda}{2\pi b} \right)^2 \cdot \frac{s}{\epsilon_0} \right\}^{-1/2}}$$

und demnach ist für  $\epsilon_0 = \epsilon$  auch immer  $\lambda_r > \lambda$ . Eine Gleichheit beider Wellenlängen tritt bei einem  $\epsilon_0 > \epsilon$  nur bei der bestimmten Wellenlänge  $\lambda = (2\pi b/j)^2 \cdot (\epsilon_0/\epsilon - 1)^{1/2}$  ein.

Schließlich ergibt sich noch aus Gl. (1,3a) für das Minimum von  $\beta_D$  der Ausdruck (1,3e). Das Minimum der Dämpfung ist dem-

$$(1,3e) \quad (\beta_D)_{\min} = \frac{j}{b} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \quad \text{mit der Abzisse} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2\pi b}{j} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon}}$$

nach gleich dem mit  $\operatorname{tg} \delta_0$  multiplizierten Wert der Dämpfung  $\beta_D$  für  $\lambda \rightarrow \infty$ , und es wird erreicht bei einer Wellenlänge, die das  $1/\sqrt{2}$ -fache der zugehörigen kritischen Wellenlänge, beträgt. Der Wert  $\beta_{D, \min}$  fällt also bereits in den Gültigkeitsbereich der Gl. (1,3a). Dieser erstreckt sich mithin mit Ausnahme der unmittelbaren Umgebung der kritischen Wellenlänge über den ganzen Durchlaßbereich des Hohlleiters. Im Hinblick auf die späteren Ausführungen ist zu beachten, daß die Gl. (1,3a) auch in der Form der Gl. (1,3a')

$$(1,3a') \quad \beta_D \approx \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \right) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k_0^2}{\alpha} \cdot \operatorname{tg} \delta_0$$

geschrieben werden kann, wenn darin  $\alpha$  den durch Gl. (1,1) erklärten Ausdruck bedeutet.

Selbst für den sehr mäßigen Wert eines  $\operatorname{tg} \delta = 10^{-4}$  beläuft sich demnach bei einem Hohlleiter von  $b = 2,5$  cm die minimale dielektrische Dämpfung bereits auf  $\beta_D = 4j$  N/km, d. h. im günstigsten Falle, den die  $TE_{11}$ -Welle verkörpert, weil für sie  $j = j_{11} = 1,84118$  den kleinsten der möglichen Werte hat, auf 7,365 N/km. Für ein  $\epsilon_0/\epsilon = 16$  tritt diese kleinste dielektrische Dämpfung bei der Vakuumwellenlänge  $\lambda = 24,1306$  cm auf. Durch die Verwendung eines den Hohlleiter zur Gänze ausfüllenden Dielektrikums würde es also in dem angegebenen Falle zwar gelingen, die kritische Wellenlänge des Hohlleiters auf  $24,1306 \cdot \sqrt{2} = 34,1259$  cm heraufzusetzen. Es entsteht dabei aber gleichzeitig eine so beträchtliche zusätzliche Dämpfung, daß dadurch der Vorteil einer Verminderung der kritischen Frequenz illusorisch gemacht wird.

Dieser Sachlage gegenüber besteht aber noch die Möglichkeit, zwischen den beiden entgegenstehenden Forderungen nach Heraufsetzung der kritischen Wellenlänge und gleichzeitiger Kleinhaltung der Dämpfung dadurch einen tragbaren Ausgleich zu schaffen, daß man den Hohlleiter nur zu einem Teil mit dem verlustbehafteten dielektrischen Material anfüllt. Diese Maßnahme wird gegenüber dem Fall der vollständigen Auffüllung nicht nur die Dämpfung

reduzieren, sondern sie wird auch die Zunahme der kritischen Wellenlänge beschränken, aber es kann sich dabei insofern immer noch ein Vorteil einstellen, als beide Änderungen in verschiedenem Maße erfolgen. Um eine besondere Halterung des dielektrischen Einsatzes zu vermeiden, wird es sich dann am meisten empfehlen, dem Einsatz kreisringförmige Gestalt zu geben, so daß sich dabei das Ringstück mit seiner äußeren Oberfläche an die innere Wandung des Hohlleiters anlehnt. Die andere mögliche Art der Einlagerung des Einsatzes als dielektrischer Mittelleiter hat vornehmlich theoretisches Interesse, denn dieses Leitergebilde steht offenbar in Parallele zu dem dielektrischen Draht im freien Raum, dessen Theorie von Hondros und Debye<sup>1)</sup> aufgestellt worden ist, und unterscheidet sich hiervon nur durch die konzentrisch zu dem Mittelleiter angeordnete metallische Hülle. Da sich die Behandlung dieses Falles von der des ringförmigen dielektrischen Einsatzes fast nur in der numerischen Durchrechnung unterscheidet, so wird er im folgenden mit in Betracht gezogen.

Die technisch herstellbaren dielektrischen Werkstoffe besitzen zwar durchweg die gleiche magnetische Permeabilität  $\mu$  wie das

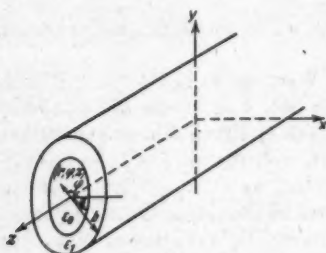


Abb. 1. Die Einlagerung der Bezugssysteme  $(x, y, z)$  und  $(r, \varphi, z)$  in den kreiszylindrischen Hohlleiter mit konzentrisch geschichtetem Dielektrikum

Vakuum. Im allgemeinen Teil der nachstehenden Untersuchungen werden wir jedoch in Rücksicht auf die größere Symmetrie, die dadurch die aufzustellenden Formeln gewinnen, zunächst stets die Voraussetzung machen, daß mit den beiden Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_0$  und  $\epsilon_1$  in den beiden Bereichen  $0 \leq r \leq a$  und  $a \leq r \leq b$  von Abb. 1 auch die beiden Permeabilitätskonstanten  $\mu_0$  und  $\mu_1$  verschiedene Werte haben. Überdies wird es sich empfehlen, die genannten vier Materialkonstanten

vorerst auch als verschieden von den für das Vakuum geltenden Größen  $\epsilon$  und  $\mu$  anzusehen. Die metallische Wandung des Hohlleiters werde wie üblich als vollkommen leitend betrachtet. Dann gilt es festzustellen, unter welchen Bedingungen sich in einem derart beschaffenen Hohlleiter eine einfarbige elektromagnetische Welle gegebener Frequenz auszubreiten vermag. Nachdem diese Bedingungen ermittelt und alle Zusammenhänge zwischen den gegebenen physikalischen und geometrischen Daten einerseits und den davon ab-

hängenden Eigenschaften der Hohlleiterwellen andererseits zutage gefördert worden sind, wird dann noch die weitere Aufgabe zu lösen sein, den Ausdruck für die gesamte Dämpfung einer Rohrwelle in einem derartigen Hohlleiter herzuleiten.

## 2. Die allgemeine Lösung der Aufgabe in Form einer gekoppelten *TM*- und *TE*-Welle

Die den Ausbreitungsvorgang anregende Welle sei etwa eine einzelne *TE*-Welle mit einer willkürlichen, aber fest gegebenen Zahl von Knotenkreisen und Knotendurchmessern. Dann läßt sich bekanntlich das Feld dieser Welle über die Gl. (2,1a, b) durch die Angabe eines Hilfsvektors  $\Omega$  beschreiben, der in dem Zylinder-

$$(2,1a) \quad \mathcal{E} = \text{rot } \Omega, \quad (2,1b) \quad g_{0,1}^{(m)} \cdot \Phi = k_{0,1}^2 \cdot \Omega + \text{grad div } \Omega$$

koordinatensystem von Abb. 1 nur die einzige Komponente  $\Omega_z = E$  besitzt. Die sechs Komponenten des transversal elektrischen Feldes dieser Welle sind durch das Gleichungssystem (2,2) gegeben,

$$(2,2a) \quad \mathcal{E}_\varphi^{(0,1)} = r^{-1} \cdot \frac{\partial E_{0,1}}{\partial r}, \quad (2,2\alpha) \quad g_{0,1}^{(m)} \cdot \Phi_r^{(0,1)} = \frac{\partial^2 E_{0,1}}{\partial r \cdot \partial z},$$

$$(2,2b) \quad \mathcal{E}_r^{(0,1)} = -\frac{\partial E_{0,1}}{\partial \varphi}, \quad (2,2\beta) \quad g_{0,1}^{(m)} \cdot \Phi_\varphi^{(0,1)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 E_{0,1}}{\partial \varphi \cdot \partial z},$$

$$(2,2c) \quad \mathcal{E}_z^{(0,1)} = 0, \quad (2,2\gamma) \quad g_{0,1}^{(m)} \cdot \Phi_z^{(0,1)} = k_{0,1}^2 \cdot E_{0,1} + \frac{\partial^2 E_{0,1}}{\partial z^2}$$

und da  $E$  der Wellengleichung genügen muß, so läßt sich schreiben im Raumteil  $0 \leq r \leq a$ ,

$$(2,3a) \quad E_0 = A_0^{(n)} \left( \frac{\cos p \varphi}{\sin p \varphi} \right) \cdot J_p(r w_0) \cdot e^{i a z} \quad (w_0 = \sqrt{k_0^2 - \alpha^2})$$

### Zusammenstellung der Formelsymbole

- $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz und die gewöhnliche Frequenz der aufgedrückten Schwingung mit dem Zeitgesetz  $\exp(-i\omega t)$  und  $i = \sqrt{-1}$ ,  
 $\epsilon, \epsilon_0, \epsilon_1$  die Dielektrizitätskonstante des Vakuums und der beiden Materialien im Hohlleiter von innen nach außen gezählt mit  $\epsilon = 1/36\pi \cdot 10^{-11} \text{ F/cm}$ ,  
 $n = \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right)^{1/2}$  der optische Brechungsindex der beiden Füllmaterialien des Hohlleiters,  
 $\mu, \mu_0, \mu_1$  die Permeabilitätskonstante des Vakuums und der beiden Materialien im Hohlleiter von innen nach außen gezählt mit  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-9} \text{ H/cm}$ ,  
 $\text{tg } \delta_0, \text{tg } \delta_1$  die Verlustwinkel der beiden Füllmaterialien des Hohlleiters,  
 $k, k_0, k_1$  die Wellenzahlen des Vakuums und der beiden Materialien im Hohlleiter mit  $k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$  und mit der Dimension  $1/\text{cm}$ ,

$\lambda, \lambda_0, \lambda_1$  die Wellenlängen der aufgedruckten Schwingung bezogen auf das Vakuum und die beiden Hohlleitermaterialien mit  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  usw.,

$\lambda_{np}^{(e)}, \lambda_{np}^{(m)}$  die auf das Vakuum bezogenen kritischen Wellenlängen einer  $TE_{np}$ - oder  $TM_{np}$ -Welle in cm,

$\lambda, \gamma = \alpha + i\beta$  die tatsächlich bestehende Hohlleiterwellenlänge in cm und das der Hohlleiterwelle zukommende Fortpflanzungsmaß mit  $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_r}$  und mit  $\beta$  als Dämpfung. Ist  $\gamma$  reellwertig, so wird stets das Zeichen  $\alpha$  benutzt,

$g^{(e)} = -i\omega\epsilon$  die Leitfähigkeit des Vakuums gegenüber dem elektrischen Verschiebungsstrom in S/cm,

$g^{(m)} = i\omega\mu$  die Leitfähigkeit des Vakuums gegenüber dem magnetischen Verschiebungsstrom in Ohm/cm,

$w_p = (k_p^2 - \alpha^2)$  mit  $p = 0$  oder 1 ein immer wiederkehrender Wurzelausdruck mit der Dimension 1/cm. Für  $k_p < \alpha$  ist  $\Im(w_p) > 0$ ,

$r, \varphi, z$  die Zylinderkoordinaten eines Raumpunktes im Innern des Hohlleiters gemäß Abb. 1,

$a$  der äußere Begrenzungsradius des inneren dielektrischen Einsatzes von kreisförmigem Querschnitt mit der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_0$  für alle  $0 \leq r \leq a$  in cm,

$b$  der Radius des Hohlleiters selbst in cm,

$\mathcal{E}, \mathcal{H}$  die elektrische und magnetische Feldstärke in V/cm und A/cm,

$\tau_p = a w_p$  zwei besondere Hilfsgrößen mit  $p = 0$  oder 1,

$E, M$  die  $z$ -Komponenten zweier Hilfsvektoren mit der Dimension  $V$  u.  $A$ .

Die Zeiger  $e$  und  $m$  werden im Text durchweg dazu verwendet, um die Zugehörigkeit einer Größe zur  $TE$ - oder  $TM$ -Welle zu kennzeichnen.

Die Funktionszeichen  $J_n, Y_n, H_n^{(1)}, H_n^{(2)}, I_n$  und  $K_n$  entsprechen durchweg der Definition dieser sechs verschiedenen Zylinderfunktionen nach dem bekannten Werk von G. N. Watson.

und im Raumteil  $a \leq r \leq b$

$$(2,3b) E_1 = A_1^{(e)} \cdot \begin{pmatrix} \cos p\varphi \\ \sin p\varphi \end{pmatrix} \begin{vmatrix} J_p(rw_1) & Y_p(rw_1) \\ J_p(bw_1) & Y_p(bw_1) \end{vmatrix} \cdot e^{i\alpha z} \text{ mit } w_1 = (k_1^2 - \alpha^2)^{1/2}.$$

Diese beiden Ansätze bringen bereits in der richtigen Weise zum Ausdruck, daß 1.  $E_0$  für  $r=0$  endlich bleiben muß, 2.  $\mathcal{E}_\varphi^{(1)}$  nach Gl. (2,2b) für  $r=b$  verschwinden muß und 3. das reelle, vorläufig aber noch unbekannte Fortpflanzungsmaß für beide Medien denselben Wert haben muß.

Da von den Konstanten  $A_0^{(e)}$  und  $A_1^{(e)}$  die eine als bekannt anzusehen ist, so sind in dem Ansatz (2,3) im ganzen nur zwei unbekannte Konstanten enthalten. In der Trennfläche  $r=a$  sind aber wegen  $\mathcal{H}_\varphi, \mathcal{E}_r$  und  $\mathcal{E}_\varphi \neq 0$  insgesamt drei Bedingungen zu erfüllen. Es ist demnach gar nicht möglich, mit dem bisherigen Lösungsansatz, der entsprechend der alleinigen Anregung des Feldes



durch eine *TE*-Welle auch nur das Auftreten einer wenn auch zusammengesetzten, so doch gleichartigen Welle vorsieht, allen Bedingungen der Aufgabe zu genügen.

Der einzig mögliche Ausweg aus dieser Schwierigkeit besteht in der Annahme, daß unter den vorliegenden Bedingungen außer der *TE*-Welle im allgemeinen auch noch eine *TM*-Welle im Hohlleiter vorhanden sein wird. Nun läßt sich das Feld einer solchen Welle über die Gl. (2,4a, b) durch die Angabe eines zweiten Hilfsvektors  $\mathfrak{P}$  beschreiben,

$$(2,4a) \quad g^{(s)} \cdot \mathfrak{E} = k^2 \cdot \mathfrak{P} + \text{grad div } \mathfrak{P}, \quad (2,4b) \quad \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{P},$$

der ebenfalls nur eine einzige Komponente  $\mathfrak{P}_z = M$  besitzt, so daß also für die fünf von Null verschiedenen Komponenten dieses Feldes das Gleichungssystem (2,5) gilt.

$$(2,5a) \quad g_{0,1}^{(s)} \cdot \mathfrak{E}_r^{(0,1)} = \frac{\partial^2 M_{0,1}}{\partial r \cdot \partial z}, \quad (2,5\alpha) \quad \mathfrak{H}_r^{(0,1)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{0,1}}{\partial \varphi},$$

$$(2,5b) \quad g_{0,1}^{(s)} \cdot \mathfrak{E}_\varphi^{(0,1)} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 M_{0,1}}{\partial \varphi \cdot \partial z}, \quad (2,5\beta) \quad \mathfrak{H}_\varphi^{(0,1)} = -\frac{\partial M_{0,1}}{\partial r},$$

$$(2,5c) \quad g_{0,1}^{(s)} \cdot \mathfrak{E}_z^{(0,1)} = k_{0,1}^2 \cdot M_{0,1} + \frac{\partial^2 M_{0,1}}{\partial z^2}, \quad (2,5\gamma) \quad \mathfrak{H}_z^{(0,1)} = 0.$$

Machen wir nun hier für den Raumteil  $0 \leq r \leq a$  den einen Ansatz

$$(2,6a) \quad M_0 = A_0^{(s)} \left( \begin{matrix} \sin \\ -\cos \end{matrix} p\varphi \right) \cdot J_p(rw_0) \cdot e^{iaz}$$

und für den Raumteil  $a \leq r \leq b$  den anderen

$$(2,6b) \quad M_1 = A_1^{(s)} \left( \begin{matrix} \sin \\ -\cos \end{matrix} p\varphi \right) \cdot \begin{vmatrix} J_p(rw_1) & Y_p(rw_1) \\ J_p(bw_1) & Y_p(bw_1) \end{vmatrix} \cdot e^{iaz},$$

so haben wir damit nicht bloß erreicht, daß  $M_0$  und  $M_1$  wie vor dem die Größen  $E_0$  und  $E_1$  die Wellengleichung befriedigen, sondern daß auch der Forderung der Endlichkeit von  $M_0$  für  $r=0$  und der Forderung des Verschwindens von  $\mathfrak{E}_\varphi$  und  $\mathfrak{E}_z$  für  $r=b$  genügt ist, soweit zu diesen Komponenten allein das Feld der *TM*-Welle beiträgt. Selbstverständlich muß in den Gl. (2,6) das Fortpflanzungsmaß  $\alpha$  dieselbe Größe haben wie in den Gl. (2,3), wenn anders es überhaupt möglich sein soll, durch bloße Überlagerung der beiden Wellenfelder (2,2) und (2,5) die Grenzbedingungen für jedes  $z$  zu erfüllen. Durch die Hinzunahme der *TM*-Welle hat sich die Zahl der vorerst unbekannten Konstanten von 2 auf im ganzen 4 erhöht. Zugleich hat sich aber die Zahl der Bedingungsbeziehungen, die an der Trennfläche  $r=a$  zu erfüllen sind, ihrerseits auch auf 4 erhöht. Wir haben damit jetzt ebensoviel Unbekannte wie Bestimmungs-

gleichungen und mithin begründete Aussicht, mit den obigen beiden Ansätzen die Lösung der Aufgabe zu erreichen.

Von den vier Grenzbedingungen kleiden sich diejenigen beiden in die einfachste Form, die sich auf den stetigen Durchgang der  $z$ -Komponenten von  $\mathfrak{E}$  und  $\mathfrak{H}$  beziehen. Damit nämlich  $\mathfrak{E}_z$  stetig durch die Fläche  $r = a$  geht, ist das Bestehen der Gleichung

$$(2,7a) \quad \frac{a^2 w_0^2}{\omega \epsilon_0} \cdot A_0^{(\omega)} \cdot J_p(a w_0) = \frac{a^2 w_1^2}{\omega \epsilon_1} \cdot A_1^{(\omega)} \cdot \begin{vmatrix} J_p(a w_1) & Y_p(a w_1) \\ J_p(b w_1) & Y_p(b w_1) \end{vmatrix},$$

erforderlich und in Rücksicht auf den stetigen Durchgang von  $\mathfrak{H}_z$  muß gelten:

$$(2,7b) \quad \frac{a^2 w_0^2}{\omega \mu_0} \cdot A_0^{(\omega)} \cdot J_p(a w_0) = \frac{a^2 w_1^2}{\omega \mu_1} \cdot A_1^{(\omega)} \cdot \begin{vmatrix} J_p(a w_1) & Y_p(a w_1) \\ J_p'(b w_1) & Y_p'(b w_1) \end{vmatrix}.$$

Das sind die beiden Gleichungen, die die Amplituden einer und derselben Welle in den beiden benachbarten Räumen  $0 \leq r \leq a$  und  $a \leq r \leq b$  miteinander in Beziehung setzen. Sie sind offensichtlich unabhängig voneinander.

Bei der Formulierung der Vorschrift, daß auch  $\mathfrak{E}_p$  stetig durch die Fläche  $r = a$  gehen muß, haben wir zu berücksichtigen, daß zu dieser Komponente beide Wellentypen einen Beitrag liefern. Es wird also

$$(2,7c) \quad \begin{cases} \frac{p a}{\omega \epsilon_0} \cdot A_0^{(\omega)} \cdot J_p(a w_0) + a w_0 \cdot A_0^{(\omega)} \cdot J_p'(a w_0) \\ = \frac{p a}{\omega \epsilon_1} \cdot A_1^{(\omega)} \begin{vmatrix} J_p(a w_1) & Y_p(a w_1) \\ J_p(b w_1) & Y_p(b w_1) \end{vmatrix} + a w_1 \cdot A_1^{(\omega)} \cdot \begin{vmatrix} J_p'(a w_1) & Y_p'(a w_1) \\ J_p'(b w_1) & Y_p'(b w_1) \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Schließlich führt die Forderung nach dem stetigen Durchgang von  $\mathfrak{H}_p$  zu der Gleichung:

$$(2,7d) \quad \begin{cases} + a w_0 \cdot A_0^{(\omega)} \cdot J_p'(a w_0) + \frac{p a}{\omega \mu_0} \cdot A_0^{(\omega)} \cdot J_p(a w_0) = \\ + a w_1 \cdot A_1^{(\omega)} \begin{vmatrix} J_p'(a w_1) & Y_p'(a w_1) \\ J_p(b w_1) & Y_p(b w_1) \end{vmatrix} + \frac{p a}{\omega \mu_1} \cdot A_1^{(\omega)} \cdot \begin{vmatrix} J_p(a w_1) & Y_p(a w_1) \\ J_p'(b w_1) & Y_p'(b w_1) \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Eliminiert man mittels der Gl. (2,7a, b) die Koeffizienten  $A_0^{(\omega)}$  und  $A_0^{(\omega)}$  aus der Gl. (2,7c), so erhält man die folgende erste Beziehung zwischen den Koeffizienten  $A_1^{(\omega)}$  und  $A_1^{(\omega)}$ :

$$(2,8a) \quad \begin{cases} A_1^{(\omega)} \cdot \begin{vmatrix} J_p(a w_1) & Y_p(a w_1) & J_p(a w_0) \\ \omega \mu_1 \frac{J_p'(a w_1)}{a w_1} & \omega \mu_1 \frac{Y_p'(a w_1)}{a w_1} & \omega \mu_0 \frac{J_p'(a w_0)}{a w_1} \\ J_p'(b w_1) & Y_p'(b w_1) & 0 \end{vmatrix} \\ = p a \cdot \frac{a^2 (k_1^2 - k_0^2)}{(a w_1)^2 \cdot (a w_0)^2} \cdot J_p(a w_0) \cdot \frac{\omega \mu_1}{\omega \epsilon_1} \cdot A_1^{(\omega)} \cdot \begin{vmatrix} J_p(a w_1) & Y_p(a w_1) \\ J_p(b w_1) & Y_p(b w_1) \end{vmatrix}. \end{cases}$$



Das ist die erste Form, auf die sich der Zusammenhang zwischen der Amplitude  $A_1^{(e)}$  der  $TE$ -Welle mit der Amplitude  $A_1^{(m)}$  der mit ihr verkoppelten  $TM$ -Welle bringen läßt. Eliminiert man hingegen die Koeffizienten  $A_0^{(e)}$  und  $A_0^{(m)}$  aus der Gl. (2,7d), so entsteht in der Gl. (2,8b) eine zweite, von der ersten verschiedene Beziehung

$$(2,8b) \quad \begin{vmatrix} J_p(aw_1) & Y_p(aw_1) & J_p(aw_0) \\ \omega \varepsilon_1 \frac{J_p'(aw_1)}{aw_1} & \omega \varepsilon_1 \frac{Y_p'(aw_1)}{aw_1} & \omega \varepsilon_0 \frac{J_p'(aw_0)}{aw_0} \\ J_p(bw_1) & Y_p(bw_1) & 0 \end{vmatrix} = A_1^{(m)} \cdot A_p^{(m)}(\varepsilon_0, \varepsilon_1; w_0, w_1) \\ = p\alpha \cdot \frac{a^2(k_1^2 - k_0^2)}{(aw_1)^2 \cdot (aw_0)^2} \cdot J_p^2(aw_0) \cdot \frac{\omega \varepsilon_1}{\omega \mu_1} \cdot A_1^{(e)} \begin{vmatrix} J_p(aw_1) & Y_p(aw_1) \\ J_p'(bw_1) & Y_p'(bw_1) \end{vmatrix}$$

zwischen den Amplituden  $A_1^{(e)}$  und  $A_1^{(m)}$ . Beide Gleichungen müssen natürlich für das Verhältnis  $A_1^{(e)}/A_1^{(m)}$  oder für das Produkt  $A_1^{(e)} \cdot A_1^{(m)}$  zu demselben Wert führen. Um die Bedingung, die diese Gleichheit erzwingt, kennenzulernen, werden im vorliegenden Falle am besten die beiden Gl. (2,8a, b) miteinander multipliziert. In der auf diese Weise entstehenden Gl. (2,9), aus der sich das Produkt  $A_1^{(e)} \cdot A_1^{(m)}$

$$(2,9) \quad \begin{cases} A_p^{(e)}(\mu_0, \mu_1; w_0, w_1) \cdot A_p^{(m)}(\varepsilon_0, \varepsilon_1; w_0, w_1) \\ = (p\alpha)^2 \cdot \left[ \frac{a^2(k_1^2 - k_0^2)}{(aw_1)^2 \cdot (aw_0)^2} \right]^2 \cdot J_p^2(aw_0) \cdot \begin{vmatrix} J_p(aw_1) & Y_p(aw_1) \\ J_p(bw_1) & Y_p(bw_1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} J_p(aw_1) & Y_p(aw_1) \\ J_p'(bw_1) & Y_p'(bw_1) \end{vmatrix} \end{cases}$$

sofort heraushebt, liegt diese Bedingung vor, und zwar in der Form einer Beziehung für das bisher noch unbekannte Fortpflanzungsmaß  $\alpha$ , das darin nicht bloß frei, sondern auch verborgen in den Wurzelausdrücken  $w_0$  und  $w_1$  vorkommt.

Denkt man sich vorerst aus dieser Gleichung den unbekannten Wert von  $\alpha$  bereits ermittelt, so sind damit für eine bestimmte Frequenz auch  $w_0$  und  $w_1$  als bekannt anzusehen. Ging dann ursprünglich die Anregung allein etwa von einer  $TE$ -Welle aus, so läßt sich über die Gl. (2,8a, b) auch sofort die Amplitude der mit ihr verkoppelten  $TM$ -Welle bestimmen und umgekehrt. Eine voneinander unabhängige Existenz dieser beiden Wellentypen ist in einem geschichteten Hohlleiter nach den obigen Gleichungen nur möglich, wenn sie eine axialsymmetrische Struktur haben und also  $p=0$  ist. Ist z. B.  $A_1^{(e)}$  von Null verschieden und damit die  $TE$ -Welle der primär gegebene Wellenzug, so bestimmt sich nach Gl. (2,8a) die Fortpflanzungskonstante dieser Welle gemäß der Gl. (2,10a). Da

$$(2,10a) \quad A_0^{(e)}(\mu_0, \mu_1; w_0, w_1) = 0 \quad (TE_{00}\text{-Welle})$$

für diesen Wert von  $\alpha$  bei der gerade vorliegenden Frequenz im allgemeinen nicht auch gleichzeitig die Determinante  $A_0^{(m)}$  von

Gl. (2,8b) verschwinden wird, so muß notwendig  $A_1^{(m)} = 0$  sein. Ist umgekehrt die  $TM$ -Welle das primär Gegebene und also  $A_1^{(m)}$  von Null verschieden, so ist zur Bestimmung von  $\alpha$  die Gl. (2,10b)

$$(2,10b) \quad A_0^{(m)}(\varepsilon_0, \varepsilon_i; w_0, w_1) = 0 \quad (TM_{\alpha 0}\text{-Welle})$$

zu benutzen, und es muß aus demselben Grunde  $A_1^{(e)} = 0$  sein.

Die beiden charakteristischen Determinanten  $A_p^{(e)}$  und  $A_p^{(m)}$  lassen sich noch in anderer Form schreiben. Vermehrt man nämlich die Elemente der ersten Spalte dieser beiden Determinanten mit den mit  $i$  multiplizierten Elementen der zweiten Spalte, erweitert sodann die Elemente der zweiten Spalte mit  $-2i$ , indem man den Faktor  $1/2$  vor die Determinante setzt, und addiert schließlich die Elemente der ersten Spalte zu denen der zweiten, so sind damit für  $A_p^{(e)}$  und  $A_p^{(m)}$  die beiden folgenden neuen Darstellungsformen entstanden:

$$(2,11a) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_p^{(e)}(\mu_0, \mu_1; w_0, w_1) \\ -\frac{i}{2} \cdot \left| \begin{array}{ccc} H_p^{(1)}(aw_1) & H_p^{(2)}(aw_1) & J_p(aw_0) \\ \omega \mu_1 \frac{H_p^{(1)'}(aw_1)}{aw_1} & \omega \mu_1 \frac{H_p^{(2)'}(aw_1)}{aw_1} & \omega \mu_0 \frac{J_p'(aw_0)}{aw_0} \\ H_p^{(1)'}(bw_1) & H_p^{(2)'}(bw_1) & 0 \end{array} \right| \end{array} \right.$$

$$(2,11b) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_p^{(m)}(\varepsilon_0, \varepsilon_i; w_0, w_1) \\ -\frac{i}{2} \cdot \left| \begin{array}{ccc} H_p^{(1)}(aw_1) & H_p^{(2)}(aw_1) & J_p(aw_0) \\ \omega \varepsilon_1 \frac{H_p^{(1)'}(aw_1)}{aw_1} & \omega \varepsilon_1 \frac{H_p^{(2)'}(aw_1)}{aw_1} & \omega \varepsilon_0 \frac{J_p'(aw_0)}{aw_0} \\ H_p^{(1)'}(bw_1) & H_p^{(2)'}(bw_1) & 0 \end{array} \right| \end{array} \right.$$

Sind  $w_0$  und  $w_1$  reelle Größen, weil  $\alpha > k_0$ ,  $k_1$  ist, so ist auch in Gl. (2,9) jeder der darin vorkommenden Faktoren reell. Es kann aber auch vorkommen, daß  $w_0$  oder  $w_1$  oder auch beide Wurzeln rein positiv imaginär werden. Dann ist z. B. für  $w_0 = i \cdot |w_0|$

$$(2,11c) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_p^{(e)}(\mu_0, \mu_1; i |w_0|, w_1) \\ -i^p \cdot \left| \begin{array}{ccc} J_p(aw_1) & Y_p(aw_1) & I_p(a |w_0|) \\ \omega \mu_1 \frac{J_p'(aw_1)}{aw_1} & \omega \mu_1 \frac{Y_p'(aw_1)}{aw_1} & -\omega \mu_0 \frac{I_p'(a |w_0|)}{a |w_0|} \\ J_p'(bw_1) & Y_p'(bw_1) & 0 \end{array} \right| \end{array} \right.$$

und da eine ganz ähnliche Gleichung für die Determinante  $A_p^{(m)}$  besteht und außerdem  $\frac{J_p^2(i a \cdot |w_0|)}{(i a \cdot |w_0|)^4} = i^{2p} \cdot \frac{I_p^2(a \cdot |w_0|)}{(a \cdot |w_0|)^4}$  ist, so stellt die Gl. (2,9) auch dann noch eine Beziehung zwischen rein reellen Größen dar. Nicht ganz so einfach gelangt man zu dem gleichen Ergebnis, falls bei reellem  $w_0$  die Wurzel  $w_1 = i \cdot |w_1|$  ist. In diesem

Falle ist es am zweckmäßigsten, zunächst die zweite Spalte der Gl. (2,8) mit  $i$  zu erweitern. Fügt man danach zu dieser Spalte die Elemente der ersten Spalte hinzu und geht von der Funktion  $H_p^{(1)}$  zu der Funktion  $K_p$  über, die bekanntlich für rein reelle Argumente selbst reell ist, so erhält man die Darstellung:

$$(2,11 d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_p^{(1)}(\mu_0, \mu_1; w_0, i|w_1|) \\ = \frac{2i}{\pi} \cdot \left| \begin{array}{ccc} I_p(a|w_1|) & K_p(a|w_1|) & J_p(aw_0) \\ -\omega\mu_1 \frac{I_p'(a|w_1|)}{a|w_1|} & -\omega\mu_1 \frac{K_p'(a|w_1|)}{a|w_1|} & \omega\mu_0 \frac{J_p'(aw_0)}{aw_0} \\ I_p(b|w_1|) & K_p(b|w_1|) & 0 \end{array} \right| \end{array} \right.$$

Auf die gleiche Weise findet man

$$(2,11 e) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_p^{(2)}(\epsilon_0, \epsilon_1; w_0, i|w_1|) \\ = \frac{2}{\pi} \cdot \left| \begin{array}{ccc} I_p(a|w_1|) & K_p(a|w_1|) & J_p(aw_0) \\ \omega\epsilon_1 \frac{I_p'(a|w_1|)}{a|w_1|} & \omega\epsilon_1 \frac{K_p'(a|w_1|)}{a|w_1|} & -\omega\epsilon_0 \frac{J_p'(aw_0)}{aw_0} \\ I_p(b|w_1|) & K_p(b|w_1|) & 0 \end{array} \right| \end{array} \right.$$

Die Änderungen, die durch den Übergang von  $w_1$  zu  $i|w_1|$  an den in Gl. (2,9) auf der rechten Seite stehenden zweireihigen Determinanten auftreten, sind mit Hilfe der beiden letzten Gleichungen leicht zu übersehen, da diese Determinanten ja aus  $\Delta_p^{(2)}$  und  $\Delta_p^{(1)}$  einfach durch Streichung der letzten Spalte und der mittleren Zeile entstehen. Es heben sich mithin die Faktoren  $2i/\pi$  und  $2/\pi$  aus der veränderten Gl. (2,9) wieder heraus, so daß sie auch in diesem Falle eine Beziehung zwischen rein reellen Größen zum Ausdruck bringt. Ehe wir uns nun mit der wirklichen Bestimmung der Wurzeln von Gl. (2,9) beschäftigen, mögen zunächst einige Sonderfälle besprochen werden.

### 2.1. Die Entartungen der charakteristischen Gleichung

Die charakteristische Gl. (2,9) umfaßt eine große Zahl besonderer Fälle, und es wird einer sehr wirksamen Prüfung auf die Richtigkeit dieser Gleichung gleichkommen, wenn wir ihrer Auflösung zunächst eine Betrachtung dieser Sonderfälle voranschicken. Dabei können wir an dieser Stelle den bereits besprochenen Sonderfall  $n=0$  übergehen, denn wir wissen schon, daß er den einzigen Fall darstellt, bei dem unter sonst beliebigen Werten von  $a, b, \epsilon_0$  und  $\epsilon_1$  die beiden Wellentypen der *TE*- und *TM*-Wellen unabhängig voneinander bestehen können.

a) Ist das Dielektrikum im ganzen Bereich  $0 \leq r \leq b$  homogen und also  $\epsilon_0 = \epsilon_1$  und  $\mu_0 = \mu_1$ , so verschwindet die linke Seite

von (2,9), da dann  $k_0 = k_1$  ist. In einem solchen Hohlleiter sind also für jedes  $p$  die beiden Wellentypen voneinander unabhängig. Gleichzeitig wird aber in diesem Falle  $w_0 = w_1$ . Zieht man daher in den beiden Determinanten  $\Delta_p^{(e)}$  und  $\Delta_p^{(m)}$  die Elemente der dritten Spalte von denen der ersten ab, so wird

$$(2,12a) \quad \Delta_p^{(e)}(\mu_0, \mu_1; w_0, w_1) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega \mu_0}{(a w_0)^2} \cdot J_p'(b w_0),$$

$$(2,12b) \quad \Delta_p^{(m)}(\varepsilon_0, \varepsilon_1; w_0, w_1) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\omega \mu_0}{(a w_0)^2} \cdot J_p(b w_0)$$

und das Verschwinden dieser beiden Determinanten führt daher tatsächlich zu den bekannten Bestimmungsgleichungen für die kritische Wellenlänge einer  $TE$ - oder  $TM$ -Welle in einem mit einem einheitlichen Stoff angefüllten Hohlleiter zurück.

b) Die rechte Seite der Gl. (2,9) verschwindet aber wegen der ersten Determinante auch für  $a=b$ , und da es sich in diesem Falle wieder um einen Hohlleiter mit einem einzigen Dielektrikum handelt, so muß sich das gleiche Ergebnis wie unter a) einstellen. Das ist auch in der Tat der Fall, denn für ein  $a=b$  werden in der Determinante  $\Delta_p^{(e)}$  nach Herausnahme des Faktors  $\omega \mu_0 / a w_1$  die zweite und dritte Spalte einander gleich, in der Determinante  $\Delta_p^{(m)}$  werden hingegen die erste und dritte Spalte einander gleich. Beide Determinanten nehmen dadurch wiederum die Gestalt der Gl. (2,12a, b) an.

c) Für  $a \rightarrow 0$  betrachtet man am besten die Fälle  $p=0$  und  $p \neq 0$  je für sich. Ist  $p=0$ , so besteht bekanntlich schon im allgemeinen Falle für beide Wellentypen die Möglichkeit zu einer selbständigen Existenz. In den übrigen Determinanten wird zudem unter der obigen Annahme über  $a$  das ihren Wert bestimmende Glied das Element im Kreuzungspunkt der zweiten Zeile mit der zweiten Spalte, und ein Verschwinden der beiden Determinanten wird nur möglich, wenn dieses Glied selbst verschwindet. Die eindeutige Bedingung hierfür ist aber das Verschwinden von  $J_0(b w_1)$  oder  $J_0'(b w_1)$ . Ist  $p \neq 0$ , so geht die rechte Seite von Gl. (2,9) für  $a \rightarrow 0$  wie  $a^{-2}$  gegen  $\infty$ , die linke Seite aber wie  $a^{-4}$ . Nach Multiplikation mit  $a^4$  muß also die linke Seite verschwinden, und sie tut das, falls einer der beiden Faktoren  $J_p'(b w_1)$  oder  $J_p(b w_1)$  zu Null wird. Damit sind wir auch in diesem Falle zu den bekannten Bestimmungsgleichungen für die kritische Wellenlänge eines Hohlleiters mit einheitlichem Füllstoff zurückgekehrt.

d) Ein weiterer bemerkenswerter Fall liegt vor für  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Dabei verhält sich der innere dielektrische Leiter bekanntlich wie ein metallischer Leiter, und wir müssen daher in diesem Grenzfall

zu den Existenzbedingungen von *TE*- und *TM*-Wellen im Innern eines kreisringförmigen Hohlleiters gelangen. Auch diese Vermutung findet ihre Bestätigung. Mit  $\varepsilon_0 \rightarrow \infty$  geht nämlich auch  $w_0$  wie  $\varepsilon^{+\frac{1}{2}}$  gegen unendlich. Die rechte Seite von (2,9) geht also wegen  $w_0 \rightarrow \infty$  ihrerseits gegen Null wie  $J_p^2(aw_0)$ . In der Determinante  $\Delta_p^{(e)}$  hat das relativ größte Glied den Faktor  $J_p(aw_0)$ , in der Determinante  $\Delta_p^{(u)}$  hingegen den Faktor  $\frac{\omega \varepsilon_0 J_p'(aw_0)}{aw_0}$ . Schafft man diese beiden Faktoren auf die rechte Seite, so geht sie gegen Null wie  $\varepsilon_0^{-1}$ , während die linke Seite an dem Grenzübergang weiterhin nicht mehr teilnimmt. Die *TE*- und *TM*-Wellen können also in der Grenze selbst unabhängig voneinander bestehen. Ihre kritischen Frequenzen ergeben sich bei der *TE*-Welle aus der Bedingung

$$(2,13a) \quad \begin{vmatrix} J_p'(aw_1) & Y_p'(aw_1) \\ J_p'(bw_1) & Y_p'(bw_1) \end{vmatrix} = 0$$

und bei der *TM*-Welle aus der Forderung

$$(2,13b) \quad \begin{vmatrix} J_p(aw_1) & Y_p(aw_1) \\ J_p(bw_1) & Y_p(bw_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Dieses Ergebnis läßt sich leicht direkt bestätigen.

In ähnlicher Weise kann für den Grenzfall  $\varepsilon_1 \rightarrow \infty$  der Nachweis geführt werden, daß hierfür die Gl. (2,9) wiederum in die beiden Bestimmungsgleichungen für die kritischen Frequenzen einer *TE*- und *TM*-Welle in einem Hohlleiter vom Radius  $a/\text{cm}$  mit dem Dielektrikum  $\varepsilon_0, \mu_0$  zerfällt.

Schließlich betrachten wir noch den Grenzfall  $b \rightarrow \infty$ . Erstrecken sich die Grenzen des Wellenfeldes bis ins Unendliche, so darf die physikalisch zulässige Lösung der Aufgabe auf keinen Fall zu einem von Null verschiedenen Energiestrom ins Unendliche oder aus dem Unendlichen führen. Das ist nur möglich, wenn wir im Gegensatz zu den bisher besprochenen Fällen für das Fortpflanzungsmaß  $\gamma = \alpha$  und damit auch für  $w_0$  und  $w_1$  komplexe Werte zulassen. Die längs des inneren dielektrischen Leiters fortschreitenden Wellen weisen dann eine Dämpfung auf. Nach den Gl. (2,3) und (2,6) wird daher  $\gamma = \alpha$  eine positiv imaginäre Komponente haben müssen, und auch für  $w_0$  und  $w_1$  ist dann sicher  $\Im m(w_0, w_1) > 0$ . In den Beziehungen (2,11a, b) für  $\Delta_p^{(e)}$  und  $\Delta_p^{(u)}$  werden jedoch unter dieser Bedingung die Funktionen  $H_p^{(2)}(bw_1)$  und  $H_p^{(2)}(bw_1)$  exponentiell unendlich groß, und das gleiche gilt von dem Produkt der beiden zweireihigen Determinanten, die auf der rechten Seite der Gl. (2,9)

vorkommen, denn es läßt sich dafür entsprechend dem Übergang von Gl. (2,6a) für  $A_p^{(n)}$  zu Gl. (2,11a) auch schreiben:

$$+ \left(\frac{i}{2}\right)^2 \cdot \begin{vmatrix} H_p^{(1)}(aw_1) & H_p^{(2)}(aw_1) \\ H_p^{(1)}(bw_1) & H_p^{(2)}(bw_1) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} H_p^{(1)}(aw_1) & H_p^{(2)}(aw_1) \\ H_p^{(1)}(bw_1) & H_p^{(2)}(bw_1) \end{vmatrix}.$$

Lösen wir dementsprechend die beiden drei- und zweireihigen Determinanten der Gl. (2,9) nach den Elementen der letzten Spalte auf und behalten in der entstehenden Entwicklung wegen ihrer überragenden Größe allein die Glieder bei, die mit der zweiten Hankelschen Funktion behaftet sind, so entsteht für die Gl. (2,9) nach einigen rein formalen Umformungen die Darstellung (2,14). In dieser Form entspricht sie von der anderen Bezeichnungsweise

$$(2,14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left\{ \frac{\omega \mu_0}{a w_0} \cdot \frac{J_p'(a w_0)}{J_p(a w_0)} - \frac{\omega \mu_1}{a w_1} \cdot \frac{H_p^{(1)}(a w_1)}{H_p^{(1)}(a w_1)} \right\} \\ & \cdot \left\{ \frac{\omega \epsilon_0}{a w_0} \cdot \frac{J_p'(a w_0)}{J_p(a w_0)} - \frac{\omega \epsilon_1}{a w_1} \cdot \frac{H_p^{(1)}(a w_1)}{H_p^{(1)}(a w_1)} \right\} \\ & = (p\gamma)^2 \cdot \left[ \frac{\alpha^2 (k_1^2 - k_0^2)}{a^2 w_1^2 \cdot a^2 w_0^2} \right]^2 \end{aligned} \right.$$

abgesehen genau der von Hondros<sup>2)</sup> angegebenen Bestimmungs-  
gleichung für das Fortpflanzungsmaß einer elektromagnetischen  
Welle längs eines einzelnen Drahtes.

### 3. Die kritische Wellenlänge der aufgedrückten Schwingung

Ebenso wie der mit Luft oder irgendeinem anderen homogenen Dielektrikum angefüllte Hohlleiter ist auch der konzentrisch geschichtete Hohlleiter im unteren Frequenzbereich von  $\omega$  für elektromagnetische Wellen undurchlässig. Analytisch zeigt sich dies darin, daß das Fortpflanzungsmaß  $\alpha$  in diesem Bereich eine positiv imaginäre Größe ist und also eigentlich eine Dämpfung vorstellt. Von anfänglich größeren Werten bewegt sich dann  $|\alpha|$  mit zunehmender Frequenz  $\omega$  zu ständig kleineren Werten hin, und an denjenigen Stellen der Frequenzskala, an denen irgendeine der unendlich vielen möglichen Wellenformen des Hohlleiters existenzfähig werden, hat der zugehörige Wert des Fortpflanzungsmaßes  $\alpha$  die Größe Null. Beziehen wir wie früher diese auf das Vakuum zu beziehende Wellenlänge mit  $\lambda_{n,p}$ , so stehen demnach bei der Frequenz  $\omega$ , die diesen Wellenlängen entspricht, die Wurzelausdrücke  $w_0$  und  $w_1$  der Gl. (2,9) mit  $\lambda_{n,p}$  in dem folgenden einfachen Zusammenhang:

$$(3,1a) \quad w_0 = k_0^{(n,p)} = \frac{2\pi}{\lambda_{n,p}} \cdot \left( \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu \epsilon} \right)^{1/2},$$

$$(3,1b) \quad w_1 = k_1^{(n,p)} = \frac{2\pi}{\lambda_{n,p}} \cdot \left( \frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu \epsilon} \right)^{1/2}.$$



Bei den speziell auf die Bestimmung der *kritischen* Wellenlängen abzielenden Rechnungen tritt aber an der Gl. (2,9) die weitere starke Vereinfachung auf, daß hierbei die rechte Seite dieser Gleichung wegen des Faktors  $\alpha$ , den sie enthält, für alle zulässigen Werte von  $p$  der Null gleich gesetzt werden muß. Machen wir dann auch noch von der schon eingangs erwähnten Tatsache Gebrauch, daß in praxi alle dielektrischen Werkstoffe die gleiche Permeabilität haben wie das Vakuum, so berechnen sich demnach für einen Hohlleiter mit dem Radius  $b$  cm, dessen dielektrischer Einsatz im Bereich  $0 \leq r \leq a$  die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_0$  und im Bereich  $a \leq r \leq b$  die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_1$  hat, die kritischen Wellenlängen aller Wellenkomponenten, die zum Typus

der *TE*-Wellen gehören, aus der Gleichung

$$(3,2a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\omega \mu} \Delta_p^{(e)}(\mu_0, \mu_1; k_0^{(n,p)}, k_1^{(n,p)}) \\ \\ = \left| \begin{array}{ccc} J_p(ak_1^{(n,p)}) & Y_p(ak_1^{(n,p)}) & J_p(ak_0^{(n,p)}) \\ \frac{J_p'(ak_1^{(n,p)})}{ak_1^{(n,p)}} & \frac{Y_p'(ak_1^{(n,p)})}{ak_1^{(n,p)}} & \frac{J_p'(ak_0^{(n,p)})}{ak_0^{(n,p)}} \\ J_p'(bk_1^{(n,p)}) & Y_p'(ak_1^{(n,p)}) & 0 \end{array} \right| = 0. \end{array} \right.$$

der *TM*-Wellen gehören, aus der Gleichung

$$(3,2b) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 \omega \mu \cdot \Delta_p^{(m)}(\epsilon_0, \epsilon_1; k_0^{(n,p)}, k_1^{(n,p)}) \\ \\ = \left| \begin{array}{ccc} J_p(ak_1^{(n,p)}) & Y_p(ak_1^{(n,p)}) & J_p(ak_0^{(n,p)}) \\ ak_1^{(n,p)} \cdot J_p'(ak_1^{(n,p)}) & ak_1^{(n,p)} \cdot Y_p'(ak_1^{(n,p)}) & ak_0^{(n,p)} \cdot J_p'(ak_0^{(n,p)}) \\ J_p(bk_1^{(n,p)}) & Y_p(bk_1^{(n,p)}) & 0 \end{array} \right| = 0. \end{array} \right.$$

Um eine anschauliche Vorstellung von dem Charakter der Lösung dieser beiden Gleichungen zu geben, ist zunächst in Abb. 2 unter der Annahme, daß der Brechungsindex  $\nu$  den Wert 2 hat und das innere Dielektrikum die Luft selbst ist, die Abhängigkeit der kritischen Wellenlänge  $\lambda_{n,0}^{(e)}$  einer *TE*<sub>n,0</sub>-Welle vom Durchmesserverhältnis  $a/b$  dargestellt worden, und zwar für die ersten 6 Teilwellen. Mathematisch gesehen ist also dabei die Aufgabe zu lösen, die ersten 6 Wurzeln der Gl. (3,2a) für  $p=0$  zu bestimmen. Hat  $a/b$  den Wert 1, so handelt es sich dann offenbar um einen mit Luft angefüllten Hohlleiter. Die kritische Wellenlänge ist also in diesem Falle gleich  $2\pi b/j_{1,0}$ . Bei dem Wert  $a/b = 0$  liegt ein Hohlleiter vor, dessen ganzes Inneres mit einem homogenen Dielektrikum mit

der Stoffkonstanten  $\epsilon_1$  angefüllt ist. In diesem Fall beträgt daher die kritische Wellenlänge das  $\nu$ -fache des zuerst angegebenen Wertes. In der Abbildung sind diese beiden Grenzfälle besonders hervorgehoben. Außerdem zeigt nun die Abb. 2, wie sich die kritische Wellenlänge in dem dazwischenliegenden Bereich mit  $a/b$  verändert. Die diese Änderung beschreibenden, von links nach rechts ansteigenden Kurven weisen mit wachsender Ordnungszahl  $n$  in ihrem

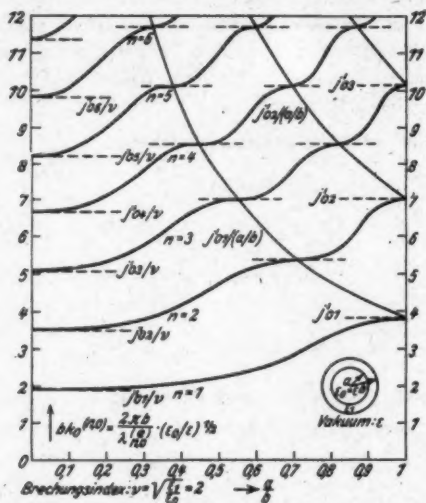


Abb. 2. Der Gang der ersten sechs Wurzeln der Gl. (3, 2a) für  $p = 0$  mit dem Verhältnis  $a/b$  für den konstanten Wert 2 des Brechungsindex

Verlauf eine wie  $n-1$  zunehmende Zahl von Absätzen auf. In den Punkten, wo diese Absätze von den Kurven  $f_{0n} \cdot a/b$  geschnitten werden, haben sie eine zur Abszissenachse parallele Tangente, und diese Punkte sind nicht bloß Nullstellen von  $\Delta_0^{(n)}$  überhaupt, sondern zugleich Nullstellen des Elementes (2,3) in  $\Delta_0^{(n)}$  sowie der Unterdeterminante, die zum Element (1,3) gehört. In Abb. 3 ist unter den gleichen Bedingungen der Verlauf von  $2\pi b/\lambda_{n,0}^{(n)}$  mit dem Verhältnis  $a/b$  für die  $TM_{n,0}$ -Welle dargestellt.

Für die praktischen Bedürfnisse verdienen natürlich die Gesetzmäßigkeiten, die für die Wellen der kleinsten Ordnung bestehen, das größte Interesse. Aus diesem Grunde wurde in Abb. 4 noch



Abb. 3.

Der Gang der ersten sechs Wurzeln der Gl. (3,2b) für  $p=0$  mit dem Verhältnis  $a/b$  für den konstanten Wert 2 des Brechungsindex

Abb. 4.

Die kleinste Wurzel der Gl. (3,2a) für  $p=0$  für die kritische Frequenz einer  $TE_{10}$ -Welle

Abb. 5.

Die kleinste Wurzel der Gl. (3,2b) für  $p=0$  für die kritische Frequenz einer  $TM_{10}$ -Welle

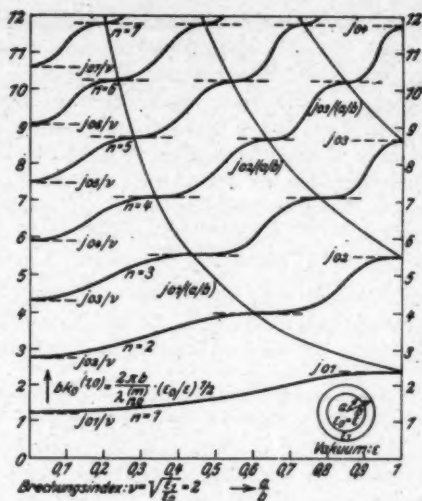


Abb. 3

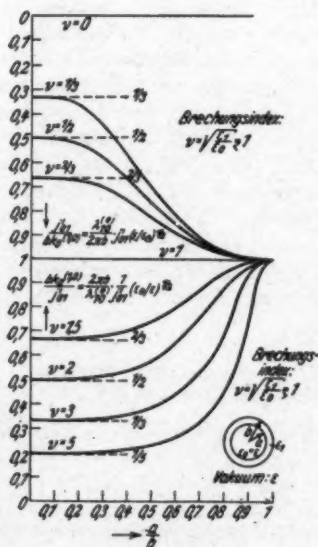


Abb. 4

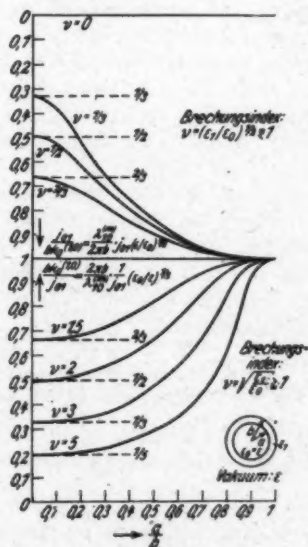


Abb. 5

einmal der Verlauf der kritischen Wellenlänge mit dem Verhältnis  $a/b$  speziell für die  $TE_{10}$ -Welle in einer bequemeren Ordinatenkala dargestellt und überdies mit der praktisch nützlichen Erweiterung, daß neben dem Wert  $\nu = 2$  für den Brechungsindex auch noch andere Werte von  $\nu$  berücksichtigt worden sind, die sowohl größer als auch kleiner als 1 sind. Man beachte bei der Beurteilung der Abbildung den in der oberen und unteren Hälfte der Abbildung verschiedenen Ordinatenmaßstab und mache sich klar, daß für ein  $\nu = (\epsilon_1/\epsilon_0)^{1/2} > 1$  das dielektrisch dichtere Material das Ringgebiet und für ein  $\nu < 1$  das Gebiet des inneren Kreises anfüllt. In den Abb. 5 und 6 ist auf die gleiche Weise der Verlauf von  $\lambda_{10}^{(w)}$  und  $\lambda_{11}^{(w)}$  mit  $a/b$  für die  $TM_{10}$ - und  $TE_{11}$ -Welle dargestellt worden. Eine weitere Erklärung zu diesen Abbildungen dürfte sich erübrigen.

#### 4. Die Berechnung des Fortpflanzungsmaßes und der Rohrwellenlänge aus der charakteristischen Gleichung

So wichtig die Kenntnis der kritischen Wellenlänge für viele Zwecke auch sein mag, so reicht sie gewiß nicht aus, wenn es wie im vorliegenden Falle unser Ziel ist, den Gang der dielektrischen Dämpfung mit der Frequenz oder der Betriebswellenlänge kennenzulernen, da hierzu jedenfalls auch der Zusammenhang zwischen der Wellenzahl  $k$  der aufgedrückten Schwingung und dem Fortpflanzungsmaß  $\alpha$  im ganzen übrigen Durchlaßbereich des Hohlleiters bekannt sein muß. Da  $\alpha$  bei allen anderen Frequenzen mit Ausnahme der kritischen von Null verschieden ist, so ist bei der Behandlung dieser Aufgabe die rechte Seite der Gl. (2,9) im allgemeinen nicht mehr einfach der Null gleich, es sei denn, es handelt sich gerade um eine der beiden axialsymmetrischen Wellentypen, für die  $p = 0$  ist. Für die numerische Behandlung der Aufgabe bedeutet natürlich das Verschwinden der rechten Gleichungsseite von (2,9) eine sehr erhebliche Erleichterung, und wir werden uns daher im folgenden ausschließlich mit diesem einfacheren Fall auseinandersetzen.

##### 4.1. Der Zusammenhang zwischen der aufgedrückten Vakuum- und der Rohrwellenlänge bei der axialsymmetrischen $TE_{n0}$ -Welle

Bei der Behandlung der  $TE_{n0}$ -Welle läuft die vor uns liegende Aufgabe auf die Auflösung der Gleichung

$$A_0^{(w)}(\mu_0, \mu_0; w_0, w_1) = 0$$

nach dem in den beiden Wurzelausdrücken  $w_0$  und  $w_1$  steckenden unbekannten Fortpflanzungsmaß  $\alpha$  hinaus, wenn dabei die beiden

Wellenzahlen  $k_0^2$  und  $k_1^2$  nebst den übrigen Daten als bekannt anzusehen sind. Um diese Aufgabe in dem richtigen Lichte zu sehen, erinnern wir uns daran, daß nach dem Durchgang der Frequenz durch die kritische Wellenlänge  $\alpha^2$  zunächst gewiß nur klein ist. Die Auflösung der Gleichung  $\Delta_0^{(e)} = 0$  ist also in diesem Bereich unter der Voraussetzung durchzuführen, daß  $w_0$  und  $w_1$  reelle Größen sind.

Wir lösen nun, um weiterzukommen, am besten die  $\Delta_0^{(e)}$  definierende Determinante von Gl. (2,8a) nach den Elementen der dritten Spalte auf und ordnen die entstehende Gleichung so, daß auf der einen Seite nur die Glieder mit  $w_0$ , auf der anderen Seite nur die Glieder mit  $w_1$  stehen. Die aufzulösende Gleichung lautet dann wie folgt:

$$(4,1a) \quad \frac{2 \cdot J_1(a w_0)}{a w_0 \cdot J_0(a w_0)} = \frac{2}{a w_1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} J_1(a w_1) & Y_1(a w_1) \\ J_1(b w_1) & Y_1(b w_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_0(a w_1) & Y_0(a w_1) \\ J_1(b w_1) & Y_1(b w_1) \end{vmatrix}} \quad \text{für } \alpha^2 < k_0^2, k_1^2.$$

Statt dessen kann man auch die Schreibweise der Gl. (4,1a) wählen.

$$(4,1a') \quad \frac{J_1(a w_0)}{J_0(a w_0)} = \frac{\begin{vmatrix} J_2(a w_1) & Y_2(a w_1) \\ J_1(b w_1) & Y_1(b w_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_0(a w_1) & Y_0(a w_1) \\ J_1(b w_1) & Y_1(b w_1) \end{vmatrix}}.$$

Wir werden jedoch der ersten Form (4,1a) den Vorzug geben.

Bei weiterer Zunahme von  $\alpha$  wird es aber auch vorkommen können, daß  $\alpha^2 > k_0^2$  oder  $k_1^2$  wird. Enthält das Ringgebiet das optisch dichtere Medium, so wird wegen  $\epsilon_0 < \epsilon_1$  zuerst die Wurzel  $w_0$  positiv imaginär werden. Wir setzen dann  $w_0 = i \cdot |w_0|$ , und die für diesen Fall der Gleichung  $\Delta_0^{(e)} = 0$  nach Art von (4,1a) entsprechende Beziehung läßt sich unmittelbar aus dieser Gleichung selbst herleiten oder sonst aus der Gl. (2,11c) auf dieselbe Weise wie Gl. (4,1a) aus (4,8a). Für ein  $k_1^2 > \alpha^2 > k_0^2$  ist also die Gleichung zu behandeln:

$$(4,1b) \quad \frac{2 \cdot J_1(a |w_0|)}{a |w_0| \cdot J_0(a |w_0|)} = \frac{2}{a w_1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} J_1(a w_1) & Y_1(a w_1) \\ J_1(b w_1) & Y_1(b w_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_0(a w_1) & Y_0(a w_1) \\ J_1(b w_1) & Y_1(b w_1) \end{vmatrix}} \quad \text{für } k_1^2 > \alpha^2 > k_0^2.$$

Ist andererseits  $\epsilon_0 > \epsilon_1$ , so ist das innere Einsatzstück das optisch dichtere Medium, und bei Zunahme von  $\alpha^2$  wird zuerst  $\alpha^2 > k_1^2$  werden, während es dabei kleiner als  $k_0^2$  ist. Dann ist  $w_1$  rein positiv imaginär, wir setzen in diesem Falle in Analogie zu der eben verabredeten Bezeichnungsweise  $w_1 = i \cdot |w_1|$ . Statt der Gl. (4,1a) ist danach unter



Über einer gemeinsamen Abszisse werden gemäß Abb. 6, die die Lösung dieser Aufgabe für den besonderen Wert  $a/b = 0,2$  darstellt, sowohl die Kurven  $f_0(aw_0)$ , die der linken Seite der Gl. (4,1a, b) entsprechen, als auch die Kurven  $f_1(aw_1)$  entsprechend der rechten Seite dieser Gleichung aufgetragen. Die voll ausgezogenen Kurven dieses Bildes beziehen sich dabei auf den Fall reellen Argumentes, die strichpunktierte Kurve auf den Fall rein imaginären Argumentes. Für alle Lösungen der Gl. (4,1a) müssen nach dieser Gleichung die beiden Ordinaten  $f_0(aw_0)$  und  $f_1(aw_1)$  gleiche Größe haben. Sind dann  $aw_0 = \tau_0$  und  $aw_1 = \tau_1$  die Abszissen der beiden Schnittpunkte, in denen eine beliebige Parallele zur Abszissenachse die beiden Kurven  $f_0(aw_0)$  und  $f_1(aw_1)$  trifft, so stehen zur Berechnung der in  $w_0$  und  $w_1$  steckenden beiden Größen  $\alpha^3$  und  $k_0^3$  oder  $k_1^3$  bei reellen Werten von  $\tau_0$  und  $\tau_1$  die folgenden beiden Gleichungen zur Verfügung:

$$(4,2a) \alpha^3 k^3 \cdot \left(1 - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}\right) \cdot \frac{\epsilon_0}{s} = \tau_0^3 - \tau_1^3, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{Vakuumwellenzahl},$$

$$(4,2b) \alpha^3 \alpha^3 \cdot \left(\frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} - 1\right) = \tau_0^3 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \cdot \tau_1^3, \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_r} = \text{Rohrwellenzahl}.$$

Werden auf die gleiche Weise zwei Kurven auf gleiche Ordinatenhöhe miteinander verglichen, von denen entweder die eine oder die andere zu positiv imaginären Argumentwerten gehört, so ist in den Gl. (11,2) entweder  $\tau_0 = i \cdot |\tau_0|$  oder  $\tau_1 = i \cdot |\tau_1|$  zu setzen.

Für die weitere Auswertung macht man sich dann am besten entsprechend den drei Fällen

I.  $\tau_0$  und  $\tau_1$  beide reell,

II.  $\tau_0$  reell, aber  $\tau_1 = i \cdot |\tau_1|$ ,

III.  $\tau_1$  reell, aber  $\tau_0 = i \cdot |\tau_0|$  je drei Kurvenblätter mit der

Abszisse  $\tau_0$  oder  $|\tau_0|$  und der Ordinate  $\tau_1$  oder  $|\tau_1|$  zurecht, in denen die auf den eingezeichneten Kurven liegenden Punkte mit ihren Abszissen und Ordinaten zusammengehörige Wertepaare der  $\tau_0$  und  $\tau_1$  darstellen. Das ist für den oben angegebenen speziellen Wert von  $a/b = 0,2$  in den Abb. 7, 8 und 9 geschehen. Die Berücksichtigung des vierten Falles, bei dem gemäß Gl. (4,1d)  $\tau_0$  und  $\tau_1$  beide imaginär sind, erübrigt sich, denn aus Abb. 6 ist sofort zu ersehen, daß diese Gleichung keine eigentliche Lösung mit endlichen Werten von  $\tau_0$  und  $\tau_1$  besitzt, da ihre linke Seite stets größer als Null, die rechte Seite stets kleiner als Null ist. Wir beginnen die Besprechung dieser drei Abbildungen mit der Abb. 7.



elektromagnetischer Wellen möglich sein, so muß  $\alpha^2 > 0$  sein. Für ein  $\epsilon_0 > \epsilon_1$  heißt das aber, daß nach Gl. (4,2b) auch stets  $\tau_0 > \tau_1 \cdot (\epsilon_0/\epsilon_1)^{1/2}$

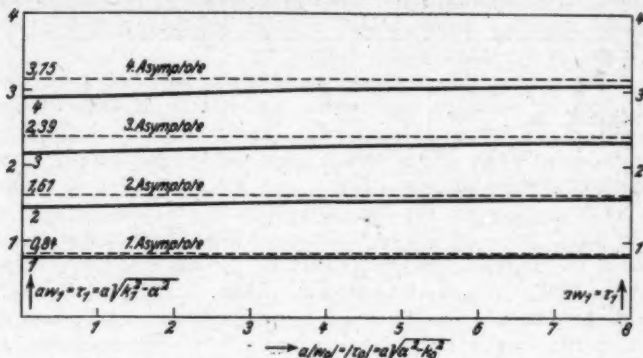


Abb. 9. Die zusammengehörigen Lösungswerte  $|\tau_0|$  und  $\tau_1$  der Gl. (4, 1b) für  $b/a = 5$

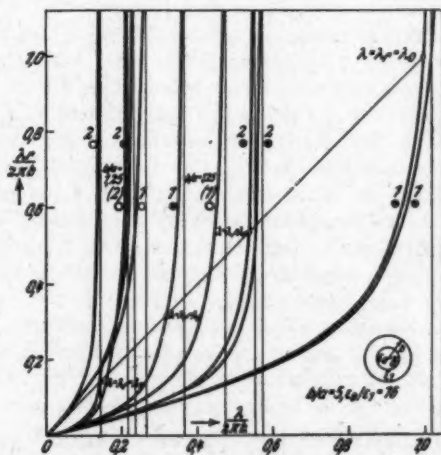


Abb. 10. Die Änderung der Wellenlänge  $\lambda$ , im Hohlleiter mit der Wellenlänge  $\lambda$  der aufgedruckten Schwingung bei der  $TE_{10}$ - und  $TE_{20}$ -Welle

sein muß und der Fall der Gleichheit dieser beiden Größen entspricht offenbar dem Zustand bei der kritischen Wellenlänge. Für



ein  $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$  besteht die ganz ähnliche Bedingung eines  $\tau_1 > \tau_0 \cdot (\varepsilon_0/\varepsilon_1)^{1/2}$ . Die daraus für den Wert  $\varepsilon_0/\varepsilon_1 = 16$  oder  $1/16$  resultierenden beiden Grenzgeraden sind in Abb. 7 miteingezeichnet worden. Alle Kurvenpunkte zwischen diesen beiden Geraden beziehen sich auf einen Zustand im Sperrbereich des Hohlleiters.

Wir bleiben nun weiterhin zunächst bei dem Fall  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  und verfolgen in Gedanken eine der Kurven zwischen der Grenzgeraden  $\tau_0 = \tau_1 \cdot (\varepsilon_0/\varepsilon_1)^{1/2}$  und der Abszissenachse. Da für jeden Kurvenpunkt die zugehörigen Werte von  $\tau_0$  und  $\tau_1$  ohne weiteres aus der Abbildung abgelesen werden können, so lassen sich aus ihnen über die beiden Gl. (4,2) auch sofort die entsprechenden Werte von  $ak$  und  $a\alpha$  oder von  $\lambda/2\pi a$  und  $\lambda_r/2\pi a$  bestimmen. Diese Größen sind es, auf die es im folgenden eigentlich ankommt. Die Art ihrer gegenseitigen Abhängigkeit veranschaulicht die Abb. 10 (⊙). Diese teils graphische, teils rechnerische Ermittlung des Zusammenhanges von  $\lambda_r/2\pi a$  mit  $\lambda/2\pi a$  findet auf Abb. 7 scheinbar ihr Ende mit dem Auftreffen der Kurve auf die Abszissenachse. Da an dieser Stelle der bisher positiv reelle Wert von  $\tau_1$  gleich Null wird, so stehen wir hier offenbar dem Eintritt des Ereignisses gegenüber, auf das schon vorher hingewiesen worden ist und das in dem Übergang von  $\tau_1$  von positiv reellen Werten zu positiv imaginären Werten besteht. Um den weiteren Verlauf der Abhängigkeit des  $\lambda_r$  von  $\lambda$  verfolgen zu können, müssen wir daher jetzt die Abb. 8 heranziehen, die die zusammengehörigen Werte von  $\tau_0$  und  $\tau_1 = i \cdot |\tau_1|$  darstellt. Auch hier hat die Berechnung der Werte von  $ak$  und  $a\alpha$  aus den einzelnen Kurvenpunkten mit Hilfe der Gl. (4,2) zu erfolgen, jedoch mit dem Unterschied, daß in diesen Gleichungen für  $\tau_1^2$  nunmehr  $-\tau_1^2$  zu setzen ist. Der weitere Gang der Rechnungen erfährt danach keine Unterbrechungen mehr. Der Punkt, in dem  $\tau_1$  von reellen zu imaginären Werten umschlägt, ist auf der Kurve der Abb. 10 durch einen kleinen Kreis hervorgehoben worden.

In ganz ähnlicher Weise erledigt sich der Fall  $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ . Hier beginnen die Rechnungen an der Grenzgeraden  $\tau_0 = \tau_1 \cdot (\varepsilon_1/\varepsilon_0)^{1/2}$ . An den Stellen, wo die zwischen dieser Geraden und der Ordinatenachse gelegenen Kurven auf die Ordinatenachse auftreffen, geht nun  $\tau_0$  von positiv reellen Werten zu positiv imaginären Werten über und, um weiter zu kommen, ist von nun an die Abb. 9 zu benutzen. Dabei muß gleichzeitig in den Gl. (4,2) das Vorzeichen von  $\tau_0^2$  in das entgegengesetzte verwandelt werden. Auch die für diesen Fall bei dem vorgelegten Zahlenbeispiel errechnete Abhängigkeit des  $\lambda_r$  von  $\lambda$  wurde in die Abb. 10 eingetragen (○). Außerdem ist hierin noch der Verlauf von  $\lambda_r$  mit  $\lambda$  für die beiden Grenzfälle dargestellt worden,



die einem entweder allein mit dem Dielektrikum  $\epsilon_0/\epsilon = 16$  (●) oder allein mit Luft angefüllten Dielektrikum (○) entsprechen. Die vergleichsweise Betrachtung dieser vier Kurven der Abb. 10, die sowohl für die  $TE_{10}$ - (Kurven mit Ziffer 1) als auch für die  $TE_{20}$ - Welle (Kurven mit Ziffer 2) wiedergegeben sind, läßt in sehr anschaulicher Form die verschiedenen Einflüsse eines ständig zunehmenden Füllfaktors auf den Verlauf von  $\lambda_r$  mit  $\lambda$  erkennen.

Aus den vorstehenden allgemeinen Angaben heben wir noch als besonders bemerkenswert die Tatsache hervor, daß das Auflaufen der in den Abb. 7—9 dargestellten Kurven auf die Abszissen- oder Ordinatenachse stets unter einem rechten Winkel erfolgt. Wir wollen in Rücksicht auf die späteren Rechnungen den Nachweis hierfür allgemein erbringen. Aus der Gl.  $\Delta_0^{(s)}(\mu, \mu, w_0, w_1) = 0$  folgt zunächst durch eine Differentiation nach den beiden Variablen  $w_0$  und  $w_1$  die Formel:

$$(4,3) \quad \frac{dw_1}{dw_0} = - \frac{\partial \Delta_0^{(s)}}{\partial w_0} / \frac{\partial \Delta_0^{(s)}}{\partial w_1}.$$

Nun gilt aber für ein  $aw_1$ , das die Gl.  $\Delta_0^{(s)}(\mu, \mu, a, w_1) = 0$  erfüllt, in der unmittelbaren Umgebung der Stelle  $aw_0 = 0$  die Entwicklung (4,3a)

$$(4,3a) \quad \Delta_0^{(s)}(\mu, \mu, w_0, w_1) \approx - \frac{\omega \mu}{4} \cdot \frac{(aw_0)^2}{aw_1} \cdot \begin{vmatrix} J_0(aw_1) & Y_0(aw_1) & 1 \\ J_1(aw_1) & Y_1(aw_1) & \frac{1}{4} \\ J_1(bw_1) & Y_1(bw_1) & 0 \end{vmatrix}.$$

Da  $\partial \Delta_0^{(s)} / \partial w_1$  für  $w_0 = 0$  von Null verschieden ist, so hat mithin nach (4,3) die Kurve  $\Delta_0^{(s)}(\mu, \mu, w_0, w_1)$  dort, wo sie die Ordinatenachse schneidet, in der Tat eine horizontale Tangente. Andererseits besteht für  $\Delta_0^{(s)}$  nach Auflösung der sie definierenden Determinante nach den Elementen der dritten Spalte die folgende absolut konvergente Reihendarstellung:

$$(4,4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Delta_0^{(s)} = \omega \mu \cdot J_0(aw_0) \cdot \frac{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}{\pi a w_1} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} (-)^p \cdot \left(\frac{aw_1}{2}\right)^{2p} \cdot \frac{\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)^{2p}}{(2p+1)!} \\ & \cdot F\left(p, p+1; 2p+1; 1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + \omega \mu \cdot \frac{J_1(aw_0)}{aw_0} \cdot \frac{2}{\pi a w_1} \cdot \frac{a}{b} \\ & \cdot \sum_{p=0}^{\infty} (-)^p \cdot \left(\frac{aw_1}{2}\right)^{2p} \cdot \frac{\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)^{2p}}{2p!} \cdot F\left(p, p+1; 2p+1; 1 - \frac{a^2}{b^2}\right). \end{aligned} \right.$$

Das für alle  $w_0$  und  $w_1$  zu fordernde Verschwinden von  $A_0^{(c)}$  drückt sich also im besonderen für  $w_1 = 0$  in dem Bestehen der Gl. (4,5)

$$(4,5) \quad 2 \cdot \frac{J_1(aw_0)}{aw_0} + \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^2 - 1 \right] \cdot J_0(aw_0) = 0$$

aus. Dann aber gilt offenbar in der unmittelbaren Umgebung der Stelle  $w_1 = 0$  für ein  $w_0$ , das der Gl. (4,5) genügt, die Entwicklung (4,3b).

$$(4,3b) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0^{(c)}(\mu, \mu; w_0, w_1) &\approx \omega \mu \cdot \frac{aw_1}{12\pi} \cdot J_0(aw_0) \cdot \left( \frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right)^2 \\ &\quad \cdot F\left(1, 3; 4; 1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \end{aligned} \right.$$

Die Ableitung  $\partial A_0^{(c)} / \partial w_1$  hat also daselbst einen endlichen, nicht verschwindenden Betrag, während die Ableitung  $\partial A_0^{(c)} / \partial w_0$  nach Gl. (4,4) dort unendlich wird. Damit ist aber auch der zweite Teil der obigen Behauptung bewiesen.

Die Kurven der Abb. 6, die die Grundlage für den Entwurf der Abb. 7—10 bilden, hängen in ihrem Verlauf nur von einem einzigen speziellen Zahlenwert ab, nämlich von der Annahme über den Wert des Verhältnisses  $a/b$ . Das gleiche gilt auch von dem Verlauf der Kurven in den Abb. 7—9. Erst bei der Berechnung des Zusammenhanges zwischen  $\lambda_r / 2\pi a$  wird es notwendig, weitere spezielle Zahlenangaben zu machen, und zwar sowohl über das Verhältnis  $\epsilon_1/\epsilon_0$  als auch über das Verhältnis  $\epsilon_0/\epsilon$ . Die letzte Angabe wird entbehrlich, wenn man in Abb. 10 als Abszisse statt der Vakuumwellenlänge  $\lambda$  die auf das Dielektrikum  $\epsilon_0$  bezogene Wellenlänge  $\lambda_0$  verwendet. Demnach macht es bei den  $TE_{n0}$ -Wellen nur wenig Mühe, die funktionale Abhängigkeit zwischen  $\lambda_r$  und  $\lambda$  auch für andere Werte von  $\epsilon_1/\epsilon_0$  aufzuzeichnen, solange dabei das Verhältnis  $a/b$  ungeändert bleibt. Die Richtung, in der sich die an Abb. 6 anzubringenden Änderungen bewegen, wenn auch das Verhältnis  $a/b$  ein anderes wird, läßt sich am leichtesten erkennen, indem man die Gl. (4,1a) unter der Annahme umschreibt, daß die beiden Argumente  $aw_0$  und  $aw_1$  sehr groß sind, denn die asymptotischen Näherungsausdrücke für die Funktionen  $J$  und  $Y$  liefern bekanntlich auch dann noch zahlenmäßig recht brauchbare Werte, wenn die Argumente nur nicht gerade sehr klein sind. Die Gl. (4,1a) ist dann näherungsweise gleichwertig der viel einfacheren Gl. (4,6), und man ersieht aus ihr sofort,

$$(4,6) \quad \frac{1}{aw_0} \cdot \operatorname{tg} \left( aw_0 - \frac{\pi}{4} \right) = - \frac{1}{aw_1} \cdot \operatorname{tg} \left( \left( \frac{b}{a} - 1 \right) aw_1 \right)$$

daß sich mit abnehmenden Werten von  $b/a$  der gegenseitige Abstand der von oben nach unten verlaufenden Kurvenzüge II in Abb. 6 ständig vergrößert. Ist  $aw_0$  in Gl. (4,6) rein imaginär, so ist

wegen  $|aw_0| > 1$  für  $\Im g|aw_0|$  der Wert 1 zu setzen, und die linke Seite von (4,6) ist dann einfach dem Wert  $1/|aw_0|$  gleich. So zeigt sich dann auch an dieser Gleichung, daß die Reellwertigkeit ihrer beiden Seiten gewahrt bleibt, wenn  $w_0$  und  $w_1$  einzeln oder zugleich rein imaginäre Werte annehmen.

**4.2. Der Zusammenhang  
zwischen der aufgedrückten Vakuum- und der Rohrwellenlänge  
bei der axialsymmetrischen  $TM_{n,0}$ -Welle**

Die Berechnung des Fortpflanzungsmaßes  $\alpha$ , das zu einer vorgegebenen Frequenz gehört, läßt sich bei einer axialsymmetrischen  $TM$ -Welle in ganz ähnlicher Weise bewerkstelligen wie bei der axialsymmetrischen  $TE$ -Welle. Nur ist dabei eine größere Rechenarbeit zu leisten, weil in der Determinante  $A_0^{(m)}$ , deren Nullstellen in bezug auf  $\alpha$  es aufzufinden gilt, die Koeffizienten  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_0$  der Elemente der mittleren Zeile nicht mehr vor die Determinante gezogen werden können. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung werden also schon in bezug auf  $w_0$  und  $w_1$  auch von dem Verhältnis  $\varepsilon_1/\varepsilon_0$  abhängig.

Löst man die Determinante  $A_0^{(m)}$  von Gl. (2,8b) wie vordem  $A_0^{(e)}$  nach den Elementen der dritten Spalte auf, so steht man, solange  $w_0$  und  $w_1$  noch beide reell sind, vor der Aufgabe, solche zusammengehörigen Werte von  $w_0$  und  $w_1$  zu finden, die die Gl. (4,7a) befriedigen.

$$(4,7a) \quad \frac{2 \cdot J_1(\alpha w_0)}{\alpha w_0 \cdot J_0(\alpha w_0)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{\alpha w_1} \cdot \frac{\begin{vmatrix} J_1(\alpha w_1) & Y_1(\alpha w_1) \\ J_0(b w_1) & Y_0(b w_1) \\ J_0(\alpha w_1) & Y_0(\alpha w_1) \\ J_0(b w_1) & Y_0(b w_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_0(b w_1) & Y_0(b w_1) \end{vmatrix}} \quad \text{für } \alpha^2 < k_0^2, k_1^2.$$

Wird bei weiterem Anwachsen von  $\alpha^2$  wegen  $k_0^2 < k_1^2$  zunächst die Wurzelgröße  $w_0$  positiv imaginär gleich  $i \cdot |w_0|$ , so nimmt die *linke* Seite der aufzulösenden Gleichung die Gestalt des unter (4,7b) angeschriebenen Ausdrucks an, während in dem anderen Falle, wo wegen  $k_0^2 > k_1^2$  die Größe  $w_1 = i \cdot |w_1|$  wird, die *rechte* Seite von Gl. (4,7a) eine Änderung erfährt und nach Gl. (2,11a) die Gestalt des unter (4,7c) angegebenen Ausdrucks erhält.

$$(4,7b) \quad \frac{2 \cdot I_1(\alpha |w_0|)}{\alpha |w_0| \cdot I_0(\alpha |w_0|)}, \quad (k_1^2 > \alpha^2 > k_0^2)$$

$$(4,7c) \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{2}{\alpha |w_1|} \cdot \frac{\begin{vmatrix} I_1(\alpha |w_1|) & -K_1(\alpha |w_1|) \\ I_0(b |w_1|) & K_0(b |w_1|) \\ I_0(\alpha |w_1|) & K_0(\alpha |w_1|) \\ I_0(b |w_1|) & K_0(b |w_1|) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} I_0(b |w_1|) & K_0(b |w_1|) \end{vmatrix}} \quad (k_1^2 < \alpha^2 < k_0^2)$$

Zwecks Auflösung der transzendenten Gl. (4,7a) kann in der gleichen Weise vorgegangen werden wie im Abschn. 4,1. Wir tragen daher einmal über der Abszisse  $a|w_0|$  oder  $a|w_0|$  die linke Seite der Gl. (4,7a) auf und das andere Mal über der Abszisse  $a|w_1|$  oder  $a|w_1|$  die rechte Seite dieser Gleichung. Hierbei besteht nur zum Unterschied gegenüber dem zuerst beschriebenen Fall die Unbequemlichkeit, daß der Verlauf einer der beiden Kurven auch noch von dem

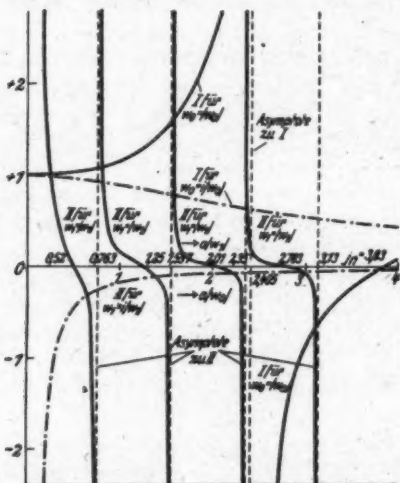


Abb. 11. Die Kurven I dieses Bildes stellen die linke Seite der Gl. (4,7a) in Funktion von  $a|w_0|$  und die Kurven II die rechte Seite dieser Gleichung in Funktion von  $a|w_1|$  dar

Verhältnis  $\varepsilon_1/\varepsilon_0$  abhängt. In der Abb. 11, die diese Kurven darstellungen wiedergibt, ist  $a/b = 0,2$  und  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 1/16$  gesetzt worden. Der Fall  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 16$  ist absichtlich in die Abb. 11 nicht mit aufgenommen worden, um nicht durch eine Vielzahl von Kurven die Übersichtlichkeit der Abbildung zu erschweren. Im übrigen ist die Aufzeichnung der Kurven in dieser Abbildung nach denselben Gesichtspunkten erfolgt wie in Abb. 6.

Die Kurven  $h(w_0, w_1)$  zusammengehöriger Werte von  $w_0$  und  $w_1$ , die aus Abb. 11 wiederum dadurch erhalten werden, daß man die zu gleichen Ordinaten  $f(w_0) = f(w_1)$  gehörenden verschiedenen Abszissen bestimmt, sind getrennt nach den drei Fällen I, II und III von Abschn. 4,1 in den Abb. 12, 13 und 14 wiedergegeben. Diese Kurven

wurden im Gegensatz zu Abb. 11 sowohl für das Verhältnis  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 1/16$  als auch für das Verhältnis  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 = 16$  dargestellt. Die Tatsache, daß sie für  $w_0 \rightarrow 0$  senkrecht auf die Ordinatenachse stoßen und für  $w_1 \rightarrow 0$  senkrecht auf die Abszissenachse, läßt sich auch im vorliegenden Falle durch allgemeine Überlegungen erhärten. Für ein  $w_0 = 0$  ist nämlich diesmal

$$4,8a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_0^{(w)}(\varepsilon_0, \varepsilon_1; w_0, w_1) &\approx \frac{\omega \varepsilon_1}{4} \cdot \frac{(aw_0)^2}{aw_1} \\ &\cdot \begin{vmatrix} J_0(aw_1) & Y_0(aw_1) & 1 \\ J_1(aw_1) & Y_1(aw_1) & \frac{\varepsilon_0}{4\varepsilon_1} \\ J_0(bw_1) & Y_0(bw_1) & 0 \end{vmatrix} + O((aw_0)^4), \end{aligned} \right.$$

wenn hierin  $w_1$  die zu  $w_0 = 0$  gehörende Wurzel von  $\Delta_0^{(w)} = 0$  bedeutet. Andererseits gilt im vorliegenden Falle für  $\Delta_0^{(w)}$  die folgende absolut konvergente Entwicklung:

$$(4,9) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_0^{(w)} &= \omega \varepsilon_1 \cdot J_0(aw_0) \cdot \frac{2}{\pi (aw_1)^2} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} (-)^p \cdot \left(\frac{aw_1}{2}\right)^{2p} \\ &\cdot \frac{\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)^{2p}}{2p!} \cdot F(p, p; 2p+1; 1 - \frac{a^2}{b^2}) \\ &- \omega \varepsilon_0 \cdot \frac{J_1(aw_0)}{aw_0} \cdot \frac{a}{\pi b} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} (-)^p \cdot \left(\frac{aw_1}{2}\right)^{2p} \\ &\cdot \frac{\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)^{2p+1}}{(2p+1)!} \cdot F(p+1, p+1; 2p+2; 1 - \frac{a^2}{b^2}). \end{aligned} \right.$$

Für  $w_1 = 0$  sind also, wie das auch aus Abb. 12 hervorgeht, die Wurzeln der Gleichung  $\Delta_0^{(w)} = 0$  identisch mit den Wurzeln  $j_{0n}$  der Gleichung  $J_0(aw_0) = 0$ , und für die Funktion  $\Delta_0^{(w)}$  gilt in der Umgebung der Stelle  $aw_1$ , falls  $aw_0 = j_{0n}$  ist, die Darstellung:

$$(4,8b) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_0^{(w)}(\varepsilon_0, \varepsilon_1; w_0, w_1) &\approx -\omega \varepsilon_0 \cdot \frac{J_1(aw_0)}{\pi \cdot aw_0} \cdot \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \\ &\cdot F\left(1, 1; 2; 1 - \frac{a^2}{b^2}\right) + O((aw_1)^2). \end{aligned} \right.$$

Nach Gl. (4,3) ist also mit  $\Delta_0^{(w)}$  an Stelle von  $\Delta_0^{(v)}$  für  $w_1 = 0$  in der Tat  $\frac{dw_1}{dw_0} \rightarrow \infty$ .

Der physikalisch hauptsächlich interessierende Zusammenhang zwischen  $\lambda_r/2\pi a$  und  $\lambda/2\pi a$  kann nun aus den Abb. 12—14 wie früher mit Hilfe der Gl. (4,2) ermittelt werden. Dabei bleiben auch

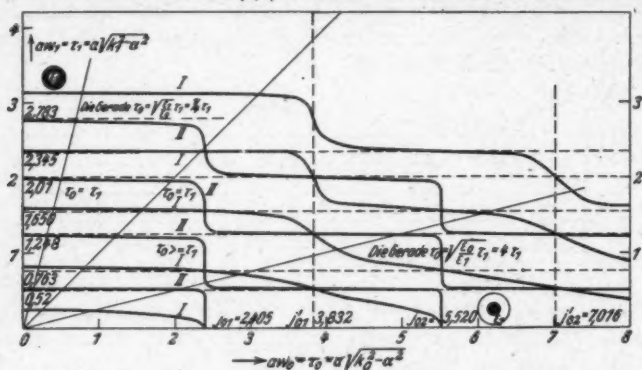


Abb. 12. Die zusammengehörigen Lösungswerte  $r_0$ ,  $r_1$  der Gl. (4,7a) für  $b/a = 5$  und  $\epsilon_1/\epsilon_0 = 1/16$  (Kurve I) und  $\epsilon_1/\epsilon_0 = 16$  (Kurve II)

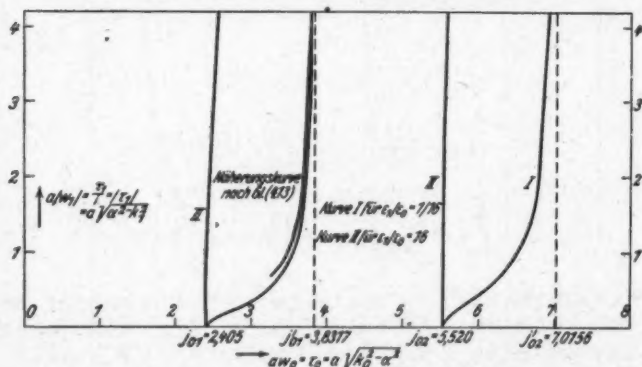


Abb. 13. Die zusammengehörigen Lösungswerte  $r_0$  und  $|r_1|$  der Gl. (4,7c) für  $b/a = 5$  und  $\epsilon_1/\epsilon_0 = 16$  oder  $1/16$

die damaligen Bemerkungen Wort für Wort in Geltung. Die so entstehende funktionale Abhängigkeit des  $\lambda_r$  von  $\lambda$  ist in Abb. 15 sowohl für die  $TM_{10}$ - (Kurven mit der Ziffer 1) als auch für die  $TM_{20}$ - (Kurven mit der Ziffer 2) Welle dargestellt, und zwar auch diesmal zusammen mit den beiden Grenzfällen, bei denen der Hohlleiter entweder zur Gänze mit Luft oder mit einem homogenen Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten 16 angefüllt ist.



Schließlich geben wir auch noch für das hier behandelte Beispiel der  $TM_{10}$ -Welle die Grenzform der Gl. (4,7a) für große Werte von  $aw_0$  und  $aw_1$  an. Sie lautet

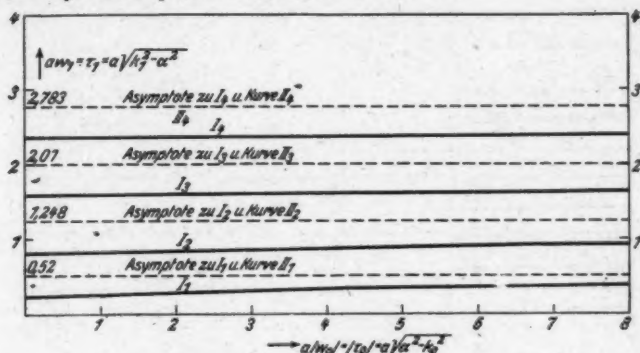


Abb. 14. Die zusammengehörigen Lösungswerte  $k_0$  und  $k_1$  der Gl. (4,7b) für  $b/a=5$  und  $s_1/s_0=16$  oder  $1/16$

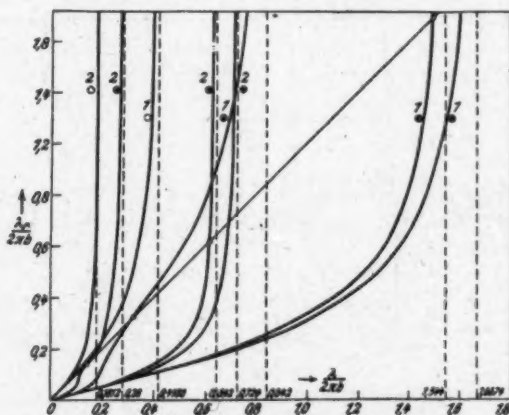


Abb. 15. Die Änderung der Wellenlänge  $\lambda$ , im Hohlleiter mit der Wellenlänge  $\lambda$  der aufgedruckten Schwingung bei der  $TM_{10}$  und  $TM_{20}$ -Welle

$$(4,10) \quad \frac{1}{aw_0} \cdot \operatorname{tg} \left( aw_0 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{s_1}{s_0} \cdot \frac{1}{aw_0} \cdot \operatorname{ctg} \left( \frac{b}{a} - 1 \right) aw_1.$$

Wie in Abb. 6 wird daher mit abnehmenden Werten von  $b/a$  der gegenseitige Abstand der in Abb. 11 von oben nach unten verlaufenden Kurven ständig größer.

4.21. Ein Näherungsausdruck für das Fortpflanzungsmaß  
bei den  $TM_{n,0}$ -Wellen für ein  $\epsilon_1/\epsilon_0 >$  oder  $< 1$

Das bei dem oben besprochenen allgemeinen Auflösungsverfahren sehr nachteilige explizite Auftreten von  $\epsilon_1/\epsilon_0$  in den zur Lösung stehenden Gl. (4,7a—c) verkehrt sich in einen Vorteil, wenn  $\epsilon_1/\epsilon_0$  einigermaßen groß oder klein gegen 1 ist. Der durch die Natur gegebene größte Wert von  $\epsilon_1/\epsilon$  beträgt 81. Er wird bekanntlich von reinem Wasser erreicht, so daß also dieser Fall für unsere Zwecke ausscheidet. Es gibt jedoch neuerdings auch feste dielektrische Stoffe mit recht hohen relativen Dielektrizitätskonstanten, die bis zu dem Wert 64 oder gar 80 hinaufreichen. Aus den Abb. 12 und 14 des vorigen Abschnitts, die nach den früheren Angaben unter der Annahme eines  $\epsilon_1/\epsilon_0 = 16$  oder  $1/16$  entworfen worden sind, geht nun aber deutlich hervor, daß bei der auf graphischem Wege erreichbaren Genauigkeit sogar schon für diesen noch nicht einmal besonders großen Wert von  $\epsilon_1/\epsilon$  wenigstens die zu den drei niedrigsten Wellenformen gehörenden Kurven für fast alle Argumente  $aw_0$  oder  $a|w_0|$  mit den auf diesen Abbildungen als Asymptoten bezeichneten Geraden zusammenfallen. Nach Abb. 11 sind diese Asymptoten nichts anderes als die Parallelen zur Ordinatenachse durch die Schnittpunkte der mit II bezeichneten Kurven mit der Abszissenachse, das sind die Stellen, an denen die Gl. (4,11a) erfüllt ist.

$$(4,11a) \quad \begin{vmatrix} J_1(aw_1) & Y_1(aw_1) \\ J_0(bw_1) & Y_0(bw_1) \end{vmatrix} = 0 \quad \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} > 1.$$

Der umgekehrte Fall  $\epsilon_1/\epsilon_0 < 1$  führt gemäß Abb. 13 bei dem Wert  $1/16$  für dieses Verhältnis längst nicht zu einem so übersichtlichen Grenzverhalten. Selbst bei dem Wert  $1/64$  wäre es noch nicht so gut ausgeprägt, denn es müßte sich dann bei gleicher Güte des Grenzverhaltens zeigen, daß die Kurve I von Abb. 13 im wesentlichen mit der zur Ordinatenachse parallelen Geraden zusammenfällt, die der Wurzel  $j_{01}$  von Gl. (4,11b) entspricht.

$$(4,11b) \quad J_1(aw_0) = 0 \quad \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} > 1.$$

Dieser Unterschied liegt im wesentlichen in der den Abb. 11—14 zugrundeliegenden Wahl des Zahlenwertes 5 für das Verhältnis  $b/a$  begründet.

Die obigen Angaben über die in den beiden Grenzfällen  $\epsilon_1/\epsilon_0 > 1$  oder  $< 1$  maßgebenden Gl. (4,11a, b) lassen sich auch unmittelbar aus der Gl. (4,7a) ablesen. Bleiben wir zunächst bei dem Fall  $\epsilon_0/\epsilon_1 < 1$

so ist die linke Seite dieser Gleichung nach Multiplikation mit  $\varepsilon_0/\varepsilon_1$  ständig eine recht kleine Größe, wofern nicht  $aw_0$  in der unmittelbaren Umgebung der Stellen  $j_{0n}$  liegt, die den Nenner  $J_0(aw_0)$  zum Verschwinden bringen. Das ist im besonderen dann nicht zu befürchten, wenn  $aw_0$  bereits imaginär geworden ist. Bezeichnet  $y_n(1, 0, a, b)$  mit  $n = 1, 2, 3 \dots$  eine der unendlich vielen Stellen der Gl. (4,11a) in bezug auf  $aw_1$ , die sie zu Null machen, so werden sich wegen der Kleinheit der linken Seite von (4,7a) die wahren Wurzeln dieser Gleichung in der Form der Gl. (4,12) darstellen lassen. Geht man

$$(4,12) \quad aw_1 = y_n(1, 0; a, b) + \varrho_n \quad \text{mit } \varrho_n \rightarrow 0 \text{ für } \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \rightarrow 0$$

mit diesem Ausdruck für  $aw_1$  in die Gl. (4,7a) ein und entwickelt nach Potenzen von  $\varrho_n$ , so findet man für diese Korrekturgröße nach Vernachlässigung aller höheren Potenzen als der ersten die folgende Beziehung:

$$(4,12a) \quad \varrho_n \cdot \left\{ 1 - \frac{\left| \begin{array}{cc} J_1(y_n) & Y_1(y_n) \\ J_1\left(\frac{b}{a} y_n\right) & Y_1\left(\frac{b}{a} y_n\right) \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} J_0(y_n) & Y_0(y_n) \\ J_0\left(\frac{b}{a} y_n\right) & Y_0\left(\frac{b}{a} y_n\right) \end{array} \right|} \right\} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} y_n \cdot \frac{I_1(a|w_0|)}{a|w_0| \cdot I_0(a|w_0|)} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

u.  $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \ll 1,$

$$\text{mit } a^2|w_0|^2 = a^2 k_1^2 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right) - y_n^2.$$

Für die soeben im Grenzfall  $\varepsilon_0/\varepsilon_1 \ll 1$  durchgeführte Schlußfolgerung ist es sehr wesentlich, daß es hier auf solche bei diesem Größenverhältnis von  $\varepsilon_0/\varepsilon_1$  bestehenden Näherungslösungen der Gl. (4,7a) ankommt, die gemäß der Gl. (4,12) in der Nachbarschaft von  $y_n$  liegen. Braucht diese nach Lage der Dinge hier notwendige Forderung nicht erhoben zu werden, so wird man auf ein ganz anderes Ergebnis geführt. Ist nämlich  $aw_1$  hinreichend verschieden von  $y_n$ , so wird für  $\varepsilon_0/\varepsilon_1 \ll 1$  nach Gl. (4,7a) die rechte Seite dieser Gleichung sehr groß, und ihre Wurzeln müssen dann in der Nähe von  $aw_0 = j_{0n}$  liegen, d. h. in der Nähe der Nullstellen der Funktion  $J_0(aw_0)$ . Damit hat sich aber der Fall ergeben, auf den bereits im letzten Absatz des Abschn. 2,1d hingewiesen worden ist.

Ist umgekehrt das Verhältnis  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 \ll 1$ , so werden die Wurzeln der Gl. (4,7a) in der Nähe von  $aw_0 = j'_{0n}$  liegen, wofern nicht die rechtsstehende Nennerdeterminante für diese Werte von  $aw_0$  in der Nähe ihrer eignen Nullstellen liegt. Auch diese Gefahr ist im besonderen dann nicht vorhanden, wenn  $aw$ , imaginär ist. Wie oben

möge für die wahre Wurzel der Gl. (4,7a) bei einem  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 \ll 1$  der Ansatz (4,13) gemacht werden. Geht man auch hier mit diesem

$$(4,13) \quad aw_0 = j'_{0n} + \sigma_n$$

Ansatz in die Gl. (4,7a) ein, entwickelt nach Potenzen von  $\sigma_n$  und bricht diese Entwicklung hinter dem ersten Gliede ab, so ergibt sich in Rücksicht auf die Formel (4,7c) die Beziehung:

$$(4,13a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_n = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{j'_{0n}}{a|w_1|} \cdot \frac{\left| \begin{array}{cc} I_1(a|w_1|) & -K_1(a|w_1|) \\ I_0(b|w_1|) & K_0(b|w_1|) \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} I_0(a|w_1|) & K_0(a|w_1|) \\ I_0(b|w_1|) & K_0(b|w_1|) \end{array} \right|} \quad \text{für } n=1, 2, 3 \dots \\ \text{und } \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \ll 1, \\ \text{mit } a^2|w_1|^2 = a^2k_0^2 \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right) - j_{0n}^{\prime 2}. \end{array} \right.$$

Damit haben wir wenigstens für die charakteristische Gleichung der  $TM_{n0}$ -Wellen eine explizite Darstellung ihrer Lösungen gefunden, wenn auch nur unter Beschränkung auf die beiden Grenzfälle  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 \gg 1$  oder  $\ll 1$ . Wegen der Kleinheit von  $\varrho_n$  und  $\sigma_n$  berechnen sich dann auf Grund der Gl. (4,12) und (4,13) für das Fortpflanzungsmaß  $\alpha$  selbst die beiden Ausdrücke:

$$(4,14a) \quad a^2 \alpha^2 \approx a^2 k_1^2 - y_n^2 - 2\varrho_n y_n,$$

$$(4,14b) \quad a^2 \alpha^2 \approx a^2 k_0^2 - j_{0n}^{\prime 2} - 2\sigma_n j_{0n}'.$$

Um eine Vorstellung von der Güte der Näherungen zu geben, die durch die Gl. (4,12) und (4,13) erreicht wird, wurde in die Abb. 13 neben die voll ausgezogenen, auf dem früher geschilderten graphischen Wege gewonnenen Kurven zusammengehöriger Wertepaare von  $aw_0$  und  $aw_1$  auch die aus (4,13) hervorgehende Kurve dieser Art eingezeichnet. Die Näherung ist darnach oberhalb von  $|r_1| = 2$  recht gut brauchbar. Bei der Bewertung der Näherung darf man nicht aus den Augen lassen, daß es sich bei Abb. 13 um den ungünstigeren Fall handelt und der Zahlenwert des Verhältnisses  $\varepsilon_0/\varepsilon_1$  noch gar nicht so besonders groß ist. Für den umgekehrten Fall ergibt sich unter den vorliegenden Umständen ein wesentlich günstigeres Bild.

#### 4.3. Die Näherungsausdrücke für das Fortpflanzungsmaß der beiden axialsymmetrischen Wellen für ein $\frac{a}{b} \ll 1$

Für die näherungsweise Auflösung der beiden charakteristischen Gleichungen  $\mathcal{A}_0^{(e)} = 0$  und  $\mathcal{A}_0^{(m)} = 0$  bietet sich eine weitere Möglichkeit in dem Falle dar, wo das Verhältnis  $a/b$  nur klein ist. Um zu der dann gültigen Näherungslösung zu kommen, hat man lediglich nötig, die beiden charakteristischen Determinanten nach den Elementen der

dritten Zeile aufzulösen und die zugehörigen Unterdeterminanten nach Potenzen von  $aw$  und  $aw_1$  zu entwickeln.

Bleibt man in dieser Entwicklung beim ersten Gliede stehen, so gelangt man im Falle der  $TE_{10}$ -Welle für die Bestimmung des Fortpflanzungsmaßes zu der Näherungsgleichung (4,15), die für  $a = 0$  oder für ein  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ , wie es sein muß, in die einfache

$$(4,15) \quad J_0'(bw_1) \approx -\frac{\pi a^3 w_0^3}{32} \cdot a^2 k_0^3 \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1\right) \cdot Y_0'(bw_1)$$

Gleichung  $J_1(bw_1) = 0$  übergeht. Da die rechte Seite dieser Gleichung wegen des kleinen Wertes von  $a$  selbst nur klein ist, so werden die Wurzeln von (4,15) in der Nähe der Nullstellen von  $J_1(bw_1)$  liegen. Machen wir dementsprechend den Lösungsansatz  $bw_1 = j_{0n} + C \cdot a^4$ , so ergibt sich nach kurzer Rechnung für das Fortpflanzungsmaß  $\alpha$  selbst die Beziehung:

$$(4,15a) \quad \alpha^2 \approx k_1^2 - \frac{j_{0n}^2}{b^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{j_{0n}'^2 + b^2(k_0^2 - k_1^2)}{J_0^2(j_{0n})} \cdot \frac{a^4}{b^4} \cdot k_0^2 \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} - 1\right).$$

In genau der gleichen Weise läßt sich zeigen, daß sich bei einer  $TM_{10}$ -Welle die Auflösung der charakteristischen Gleichung  $A_0^{(m)} = 0$  für genügend kleine Werte von  $a$  auf die Auflösung der Näherungsgleichung (4,16) reduziert. Aus ihr fließt als Näherungsgleichung für das Fortpflanzungsmaß  $\alpha$  selbst die Beziehung (4,16a). Auch diese beiden Gleichungen vereinfachen sich für  $a = 0$  und  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$  in der

$$(4,16) \quad J_0(bw_1) \approx \frac{\pi a^3 w_1^3}{4} \cdot \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - 1\right) \cdot Y_0(bw_1),$$

$$(4,16a) \quad \alpha^2 \approx k_1^2 - \frac{j_{0n}^2}{b^2} - \frac{(j_{0n}/b)^2}{J_1^2(j_{0n})} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right)$$

zu erwartenden Art und Weise. Als einen besonders auffälligen Unterschied zwischen den Gl. (4,15a) und (4,16a) verzeichnen wir die Tatsache, daß im ersten Falle das Korrekturglied von der Ordnung  $(a/b)^4$  und im zweiten Falle von der Ordnung  $(a/b)^2$  ist. Diesen Unterschied illustrieren in sehr anschaulicher Weise die Kurven in den Abb. 4 und 5 durch die verschiedene Neigung, mit der sie für  $a/b \rightarrow 0$  in die Horizontale einmünden.

Die obigen Schlußfolgerungen, die zu den Näherungsgleichungen für  $\alpha^2$  führten, werden hinfällig, wenn  $w_1$  selbst sehr klein oder gar rein imaginär ist. Sie sind nur zulässig, wie das ja auch durch die Wahl des Lösungsansatzes für  $bw_1$  bereits zum Ausdruck gebracht worden ist, wenn  $w_1$  reellwertig ist. Dieser Umstand beschränkt teilweise die Gültigkeit der obigen Näherungsgleichungen nicht un-

wesentlich. Am wenigsten ist das noch der Fall für ein  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 > 1$ , da dann, wie wir schon im Abschn. 4,1 gesehen haben, die Auflösung der beiden charakteristischen Gleichungen überhaupt zu keinen anderen als zu reellen Werten für  $w_1$  führt. Für ein  $\varepsilon_0/\varepsilon_1 > 1$  ist aber  $w_1$  nur in dem verhältnismäßig schmalen Frequenzbereich reell, der sich nach oben hin unmittelbar an die kritische Frequenz anschließt.

#### 5. Die Dämpfung der axialsymmetrischen Wellen infolge der dielektrischen Verluste

Nachdem in den beiden voranstehenden Abschnitten gezeigt worden ist, wie es wenigstens bei den beiden axialsymmetrischen Wellentypen gelingt, das Fortpflanzungsmaß  $\alpha = 2\pi/\lambda$ , aus der charakteristischen Gl. (2,9) zu bestimmen, wollen wir uns jetzt der zweiten Hälfte der eingangs formulierten Aufgabe zuwenden und an erster Stelle einen Ausdruck für die dielektrische Dämpfung einer Hohlleiterwelle herzuleiten versuchen. Zunächst werden wir bei den darauf abzielenden Rechnungen annehmen, daß beide Dielektrika verlustbehaftet sind, da dieses Vorgehen die lästigen Fallunterscheidungen überflüssig macht, ohne daß die rechnerischen Schwierigkeiten dadurch größer werden.

Nach einem schon im Abschn. 1 erfolgten Hinweis verlangt die Annahme eines verlustbehafteten Dielektrikums zunächst einmal den Ersatz von  $\varepsilon_1, \varepsilon_0$  durch die komplexen Ausdrücke

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_0) \cdot [1 + i \cdot (\operatorname{tg} \delta_1, \operatorname{tg} \delta_0)].$$

Da aber bei einem verlustbehafteten Dielektrikum auch mit einer Dämpfung der Wellen gerechnet werden muß, so hat man auch das früher reelle Fortpflanzungsmaß  $\alpha$  durch das komplexe Fortpflanzungsmaß  $\gamma = \alpha_{Dg} + i \cdot \beta_{Dg}$  zu ersetzen, wobei dann zunächst sowohl  $\alpha_{Dg}$  als auch  $\beta_{Dg}$  unbekannt sind. In den Gl. (2,10a, b) ist demnach jetzt für  $w_p$  zu schreiben:

$$(5,1) \quad w_p^{(v)} = \left\{ \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon} \cdot (1 + i \cdot \operatorname{tg} \delta_p) - (\alpha_{Dg} + i \cdot \beta_{Dg})^2 \right\}^{1/2} \quad (p=0,1).$$

Nun ist wegen des sehr kleinen Wertes von  $\operatorname{tg} \delta_p$  sicherlich auch  $\beta_{Dg}$  eine kleine Größe. Solange also das Hauptglied in Gl. (5,1a) nicht gerade klein und auch  $\alpha_{Dg}$  von Null verschieden ist, darf für  $w_p^{(v)}$  in Gl. (5,1) wegen  $k_p^2 = (2\pi/\lambda)^2 \cdot \varepsilon_p/\varepsilon$  bis auf Größen zweiter Ordnung in  $\operatorname{tg} \delta_p$  gesetzt werden:

$$(5,1a) \quad w_p^{(v)} = \{k_p^2 - \alpha_{Dg}^2\}^{1/2} + \frac{i}{2} \cdot \frac{k_p^2 \cdot \operatorname{tg} \delta_p - 2\alpha_{Dg} \cdot \beta_{Dg}}{\{k_p^2 - \alpha_{Dg}^2\}^{1/2}} = w_p^{(D)} + i \cdot \eta_p.$$



Nach diesen vorbereitenden Rechnungen wollen wir uns dann zunächst mit der Berechnung der Dämpfung einer  $TM_{n0}$ -Welle beschäftigen. Zu diesem Zweck gehen wir mit dem Ausdruck (5,1a) an Stelle von  $w_0$  und  $w_1$  in die Gl. (2,10b) ein und entwickeln die Determinante nach den kleinen Änderungen von  $w_p^{(D)}$  und  $\varepsilon_p$ . Damit entsteht als Bestimmungsgleichung für  $\alpha_{Dg}$  und  $\beta_{Dg}$  bis auf Glieder zweiter Ordnung in  $\lg \delta$  die Beziehung (5,2), in der sich die Ab-

$$(5,2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Delta_0^{(m)}(\varepsilon_0 + i \cdot \varepsilon_0 \cdot \lg \delta_0, \varepsilon_1 + i \cdot \varepsilon_1 \cdot \lg \delta_1; w_0^{(D)} + i \eta_0, w_1^{(D)} + i \eta_1) = 0 \\ & = \Delta_0^{(m)}(\varepsilon_0, \varepsilon_1; w_0^{(D)}, w_1^{(D)}) \\ & + i \cdot \sum_{p=0}^1 \varepsilon_p \cdot \lg \delta_p \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon_p} \Delta_0^{(m)}(\varepsilon_0, \varepsilon_1; w_0^{(D)}, w_1^{(D)}) \\ & + i \cdot \sum_{p=0}^1 \eta_p \cdot \frac{\partial}{\partial w_p^{(D)}} \Delta_0^{(m)}(\varepsilon_0, \varepsilon_1; w_0^{(D)}, w_1^{(D)}) \end{aligned} \right.$$

leitung nach den  $\varepsilon_p$  nur auf die explizite als Faktoren in  $\Delta_0^{(m)}$  auftretenden  $\varepsilon$ -Werte bezieht. Aus den früheren Angaben im Abschn. 2 ist aber bekannt, daß in Gl. (5,2), es mögen nun  $w_0$  und  $w_1$  rein reell oder rein imaginär sein, die Determinante  $\Delta_0^{(m)}$  selbst stets reell ist. Demnach ist in dieser Gleichung das Hauptglied das einzige reelle Glied, während alle anderen Glieder rein imaginär werden. Aus dem Verschwinden der Gliedersumme folgt daher:

1. Unter der Voraussetzung eines genügend kleinen Wertes von  $\lg \delta_p$  ist auch in einem konzentrisch geschichteten Hohlleiter, der mit verlustbehafteten Dielektrika angefüllt ist, das Fortpflanzungsmaß einer  $TM_{n0}$ -Welle praktisch das gleiche wie bei Verwendung verlustfreier Dielektrika, und es berechnet sich mithin das Fortpflanzungsmaß auch im Verlustfalle nach wie vor aus Gl. (2,10b). In Gl. (5,2) kann daher fortan überall  $\alpha_{Dg}$  durch  $\alpha$  und damit auch  $w_p^{(D)}$  durch  $w_p$  ersetzt werden.

2. In einem konzentrisch geschichteten Hohlleiter mit zwei verschiedenen verlustbehafteten Dielektrika läßt sich für alle von Null genügend verschiedenen Werte von  $\alpha$ , es möge dabei  $w_p$  reell oder imaginär sein, die Dämpfung einer  $TM_{n0}$ -Welle nach der Formel (5,3) berechnen.

$$(5,3) \quad \beta_{Dg}^{(m)} = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{\sum_{p=0}^1 \lg \delta_p \cdot \left[ 2 \cdot \varepsilon_p \cdot \frac{\partial \Delta_0^{(m)}}{\partial \varepsilon_p} + \frac{k_p^2}{w_p} \cdot \frac{\partial \Delta_0^{(m)}}{\partial w_p} \right]}{\sum_{p=0}^1 \frac{1}{w_p} \cdot \frac{\partial \Delta_0^{(m)}}{\partial w_p}} \quad N/\text{cm} \quad (\alpha > 0).$$

Für die nach den  $\varepsilon_p$  abgeleiteten Determinanten ist der explizite Ausdruck leicht herzustellen. Bedeutet nämlich  $\Delta_0^{(m)}(1,3)$  die zu dem Element der ersten Zeile und dritten Spalte gehörende Unterdeterminante von  $\Delta_0^{(m)}$  gemäß der Definitionsgleichung (2,8b), so ist unter Benutzung eines bekannten Entwicklungssatzes wegen  $\Delta_0^{(m)} = 0$

$$(5,4a) \quad \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \Delta_0^{(m)}}{\partial \varepsilon_1} = J_0(a w_0) \cdot \Delta_0^{(m)}(1,3) = w \varepsilon_0 \cdot \frac{J_1(a w_0)}{a w_0} \cdot \Delta_0^{(m)}(2,3),$$

$$(5,4b) \quad \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \Delta_0^{(m)}}{\partial \varepsilon_0} = -\omega \varepsilon_0 \cdot \frac{J_1(a w_0)}{a w_0} \cdot \Delta_0^{(m)}(2,3) = -J_0(a w_0) \cdot \Delta_0^{(m)}(1,3).$$

Die beiden links stehenden Ausdrücke sind also entgegengesetzt gleich.

Bei der Herleitung der Gl (5,3) haben wir anfangs unter anderen die Annahme gemacht, daß neben  $\alpha$  auch die  $w_p$  von Null verschieden sind. Nun ist für ein  $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$  nach Abb. 15 sowieso nur mit einem Verschwinden von  $w_0$  und im umgekehrten Falle nur mit einem Verschwinden von  $w_1$  zu rechnen. Nehmen wir aber hier bezug auf die Gl. (4,8a, b), so ist aus ihnen sofort zu ersehen, daß die Ausdrücke  $\frac{1}{w_p} \cdot \frac{\partial \Delta_0^{(m)}}{\partial w_p}$  sowohl für  $p = 0$  an der Stelle  $w_0 = 0$  als auch für  $p = 1$  an der Stelle  $w_1 = 0$  durchaus endlich bleiben. Für die Gültigkeit der Gl. (5,3) ist also ebenso wie im Falle der Gl. (1,3a) nur noch wesentlich, daß  $\alpha > 0$  bleibt. Der Geltungsbereich von (5,3) umfaßt daher bereits den ganzen Teil der Dämpfungskurve, der für die praktische Beurteilung allein wichtig ist.

Für  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$  muß die Formel (5,3) selbstredend in die frühere Gl. (1,3a') übergehen, da ja unter dieser Annahme das Dielektrikum homogen ist. Das ist nun in der Tat der Fall, denn, sobald  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$  ist, wird  $\frac{\partial \Delta_0^{(m)}}{\partial \varepsilon_p} = \frac{\Delta_0^{(m)}(\varepsilon_0, \varepsilon_0, w_0, w_1)}{\varepsilon_0} = 0$ , und da auch  $k_p^2 = k_0^2$  und  $\operatorname{tg} \delta_p = \operatorname{tg} \delta_0$  vor das Summenzeichen gezogen werden können, so gelangt man damit wirklich von der Gl. (5,3) zu der einfachen Gl. (1,3a') zurück.

Ist nur eines der beiden Dielektrika innerhalb des Hohlleiters verlustbehaftet, wie es bei der uns vorschwebenden Ausführung der Fall ist, so vereinfacht sich die Gl. (5,3) nicht unwesentlich. Ist z. B. allein das *innere* Dielektrikum verlustbehaftet und also  $\operatorname{tg} \delta_0 \neq 0$ , so wird

$$(5,3a) \quad \left\{ \begin{aligned} & \beta_{Dg}^{(m)} / \left( \frac{k_0^2 \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{2 \sqrt{k_0^2 - (j_0 n/b)^2}} \right) = \frac{\sqrt{k_0^2 - (j_0 n/b)^2}}{\alpha} \\ & \cdot \frac{1 + \frac{2 \omega \varepsilon_0}{\alpha^2 k_0^2} \cdot J_1(a w_0) \cdot \frac{\Delta_0^{(m)}(2,3)}{\partial \Delta_0^{(m)} / \partial (a w_0)}}{1 + \frac{w_0}{w_1} \cdot \frac{\partial \Delta_0^{(m)} / \partial w_1}{\partial \Delta_0^{(m)} / \partial w_0}} \quad (\alpha > 0). \end{aligned} \right.$$

Weist allein das äußere Dielektrikum Verluste auf, so erhält man

$$(5,3b) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_{Dg}^{(m)} / \left( \frac{k_1^2 \cdot \operatorname{tg} \delta_1}{2 \sqrt{k_1^2 - (j_{0n}/b)^2}} \right) &= \frac{\sqrt{k_1^2 - (j_{0n}/b)^2}}{\alpha} \\ &\cdot \frac{1 + \frac{2\omega \varepsilon_0}{a^2 k_1^2} \cdot \frac{w_1}{w_0} \cdot J_1(aw_0) \cdot \frac{A_0^{(m)}(2,3)}{\partial A_0^{(m)}/\partial (aw_1)}}{1 + \frac{w_1}{w_0} \cdot \frac{\partial A_0^{(m)}/\partial w_1}{\partial A_0^{(m)}/\partial w_0}} \quad (\alpha > 0). \end{aligned} \right.$$

In den Gl. (5,3a, b) steht auf der linken Seite das Verhältnis der dielektrischen Dämpfung  $\beta_{Dg}$  des Hohlleiters mit geschichtetem Einsatz zu der Dämpfung desselben Hohlleiters, wenn er zur Gänze mit dem betreffenden verlustbehafteten Dielektrikum allein angefüllt ist. Wird dabei wie oben angegeben die  $n$ -te Wurzel von  $J_0(x) = 0$  benutzt, so müssen natürlich auch für  $w_0$  und  $w_1$  die entsprechenden  $n$ -ten Wurzeln der Gleichung  $A_0^{(m)} = 0$  verwendet werden.

Die Herleitung der analogen Dämpfungsformeln für die  $TE_{n0}$ -Welle gestaltet sich wesentlich einfacher, weil in diesem Falle die charakteristische Determinante  $A_0^{(e)}$  die Faktoren  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_0$  nicht explizite enthält. Im übrigen kann sie auf die gleiche Weise erfolgen. Bei der  $TE_{n0}$ -Welle tritt mit der früheren Bezeichnungsweise an die Stelle der Gl. (5,2) die von vornherein einfachere Gl. (5,5). Auch ihre Gültigkeit ist zunächst an die Forderung

$$(5,5) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0^{(e)}(\mu, \mu; w_0^{(D)} + i\eta_0, w_1^{(D)} + i\eta_1) &= A_0^{(e)}(\mu, \mu; w_0^{(D)}, w_1^{(D)}) \\ &+ i \sum_{p=0}^1 \eta_p \cdot \frac{\partial}{\partial w_p^{(D)}} A_0^{(e)}(\mu, \mu; w_0^{(D)}, w_1^{(D)}) = 0 \end{aligned} \right.$$

gebunden, daß die  $w_p$  und  $\alpha_{Dg} \neq 0$  sind. Für ein reelles oder imaginäres  $w_0^{(D)}$  und ein reelles  $w_1^{(D)}$  ist in (5,5) das Hauptglied reell und das Störungsglied rein imaginär. Ist jedoch  $w_1^{(D)}$  rein imaginär, so wird nach Gl. (2,11d) jetzt das Hauptglied rein imaginär und das Störungsglied rein reell. Auf jeden Fall stellt sich aber für die verschiedenen, für  $w_0$  und  $w_1$  in Frage kommenden Wertebereiche auch stets eine verschiedene Art der Wertigkeit von Hauptglied und Störungsglied ein. Aus diesem Verhalten läßt sich daher auch im vorliegenden Falle der Schluß ziehen, daß in einem Hohlleiter mit verlustbehafteten Füllstoffen das Fortpflanzungsmaß  $\alpha_{Dg}$  einer  $TE_{n0}$ -Welle von dem Verlustwinkel der betreffenden Materialien in erster Ordnung unabhängig ist. Für die Dämpfung führt die Gl. (5,5) mittels der gleichen Schlußweise, falls beide dielektrische von Null verschiedene Verlustwinkel haben, zu der mit demselben Grade der Näherung gültigen Formel (5,6). Die besonderen Formen,

$$(5,6) \quad \beta_{Dg}^{(e)} = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{\sum_{p=0}^1 \frac{k_p^2}{w_p} \cdot \frac{\partial A_0^{(e)}}{\partial w_p} \operatorname{tg} \delta_p}{\sum_{p=0}^1 \frac{1}{w_p} \cdot \frac{\partial A_0^{(e)}}{\partial w_p}} N/\text{cm} \quad (\alpha > 0)$$

die sie annimmt, wenn entweder  $\delta_0$  oder  $\delta_1$  allein von Null verschieden sind, brauchen in diesem Falle wohl nicht im einzelnen angeschrieben zu werden. Der Gültigkeitsbereich der Gl. (5,6) ist gleichfalls nur durch die Forderung  $\alpha > 0$  beschränkt, denn für  $w_0 = 0$  bleibt sowieso jedes Glied im Zähler und Nenner von Gl. (5,6) endlich, und für  $w_1 = 0$  gilt nach Erweiterung mit  $w_1$  dasselbe. In den Gl. (5,3) und (5,6) haben wir uns damit sowohl für die  $TM_{n0}$ - als auch für die  $TE_{n0}$ -Welle die Möglichkeit geschaffen, für den ganzen Durchlaßbereich eines zweifach konzentrisch geschichteten Hohlleiters den dielektrischen Dämpfungsanteil auch zahlenmäßig zu berechnen. Dabei ist allerdings Voraussetzung, daß der Zusammenhang zwischen der aufgedruckten Frequenz und den Wurzelausdrücken  $w_0$  und  $w_1$  bereits anderweitig bekannt ist. Gerade der Auffindung dieses Zusammenhanges dienten aber für die genannten beiden Wellentypen die Rechnungen in den Abschnitten 4,1 und 4,2.

Trotz der großen grundsätzlichen Bedeutung, die der Dämpfung im Sperrbereich eines Hohlleiters zukommt, besteht im allgemeinen nach einer genaueren Kenntnis dieser Dämpfung kein Bedürfnis, weil es in der Regel zu wissen genügt, daß sie in diesem Bereich sehr groß ist. Es soll jedoch an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, daß auch unter den vorliegenden Bedingungen diese Sperrdämpfung nötigenfalls berechnet werden kann, wenn auch natürlich nicht mit derselben Leichtigkeit wie etwa mit Hilfe der Gl. (1,3d) bei einem Hohlleiter mit einem homogenen Dielektrikum. Selbstverständlich kommt es für die Ermittlung der Dämpfung im Sperrbereich in keiner Weise mehr auf die Verlusteigenschaften der verwendeten Dielektrika an. Wir stehen hier vielmehr dem Fall gegenüber, daß das Fortpflanzungsmaß  $\alpha$  rein positiv imaginär ist und daher selbst die Rolle der Dämpfung spielt. Aus diesem Grunde können wir jetzt in Gl. (5,1)  $\operatorname{tg} \delta$  und  $\alpha_D$  als den Realteil von  $\gamma_D$  gleich Null setzen. Dafür darf aber in der nunmehr

$$(5,7) \quad w_p = \{k_p^2 + \alpha_{Dg}^2\}^{1/2}$$

für  $w_p$  geltenden Gl. (5,7)  $\beta_{Dg}$  nicht mehr als klein gegenüber  $k_p$  angesehen werden, und die Berechnung des unbekannten Wertes von  $\beta$  muß nun wieder aus der Auflösung der beiden transzendenten

Gleichungen  $A_0^{(e)}=0$  oder  $A_0^{(m)}=0$  nach  $w_0$  und  $w_1$  erfolgen. Das kann an Hand von Bild 7 und Bild 12 nach demselben graphisch-analytischen Verfahren geschehen wie in den Abschnitten 4,1 und 4,2 die Berechnung von  $\alpha$ . Die den Gl. (4,2a, b) entsprechenden Beziehungen haben dabei die nur wenig veränderte Form der Gl. (5,8a, b)

$$(5,8a) \quad \alpha^2 k^2 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right) \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} = \tau_0^2 - \tau_1^2$$

$$(5,8b) \quad \alpha^2 \beta_D^2 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}\right) = \tau_0^2 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \cdot \tau_1^2$$

die sich einfach aus dem Übergang von  $\alpha$  zu  $i \cdot \beta$  erklärt. Die Unterscheidung der beiden Fälle  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$  hat auch hier in derselben Weise zu erfolgen wie im Abschnitt 4,1. Besonders einfach erledigt sich nach diesem Verfahren die Bestimmung der maximalen Dämpfung bei der Frequenz  $\omega=0$ , bei der also nach den letzten beiden Gleichungen  $\tau_0 = \tau_1$  ist. Wir wollen jedoch hierauf nicht näher eingehen.

Die Formeln (5,3) und (5,6) für die dielektrische Dämpfung können noch auf eine erheblich durchsichtigere Form gebracht werden. Für die zahlenmäßige Berechnung bringt allerdings diese Umformung keinen Vorteil mit sich. Der größte Erfolg läßt sich damit an der Gl. (5,6) erzielen. Wir gehen von der Tatsache aus, daß die in (5,6) auftretenden Wurzelgrößen  $w_0$  und  $w_1$  an allen Stellen des Gültigkeitsbereiches dieser Gleichung stets die Gl.  $A_0^{(e)}(\mu, \mu, w_0, w_1)=0$  erfüllen. Mithin besteht zwischen den partiellen Ableitungen der Determinante  $A_0^{(e)}$  nach dem  $w_0$  und  $w_1$  die Gl. (4,3). An Stelle der Gl. (5,6) läßt sich daher auch schreiben

$$\beta_{Dg}^{(e)} = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{k_1^2 \cdot \operatorname{tg} \delta \cdot w_0 \cdot dw_0 - k_0^2 \cdot \operatorname{tg} \delta \cdot w_1 \cdot dw_1}{w_0 \cdot dw_0 - w_1 \cdot dw_1}.$$

Nun ist aber wegen  $w_p^2 = k_p^2 - \alpha^2$

$$2 \cdot w_p \cdot dw_p = d(w_p^2) = d(k_p^2) - d(\alpha^2) = \frac{e_p}{\varepsilon} \cdot d(k^2) - d(\alpha^2).$$

Mithin erhält man auch

$$\beta_{Dg}^{(e)} = \frac{k^2}{2\alpha} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon_1} \left[ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\varepsilon^2} \cdot (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_0) + \left( \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} - \operatorname{tg} \delta_1 \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right) \cdot \frac{d(\alpha^2)}{d(k^2)} \right].$$

Ersetzt man hierin nach  $\alpha$  durch  $2\pi/\lambda_r$  und  $k$  durch  $2\pi/\lambda$ , so entsteht die folgende Schlußgleichung:

$$(5,9) \quad \beta_{Dg}^{(e)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon_1} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot \left\{ \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\varepsilon^2} \cdot (\operatorname{tg} \delta_1 - \operatorname{tg} \delta_0) \cdot \frac{\lambda_r}{\lambda} + \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \cdot \operatorname{tg} \delta_1 \right) \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda_r} \cdot \frac{d\lambda_r}{d\lambda} \right\}.$$

Für  $\operatorname{tg} \delta_0 = 0$  oder  $\operatorname{tg} \delta_1 = 0$  fließen aus ihr die beiden besonderen Gleichungen:

$$(5,9a) \quad \beta_{Dg}^{(e)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} \delta_1 \cdot \left\{ \frac{\lambda^2}{\lambda_r^2} \cdot \frac{d\lambda_r}{d\lambda} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \cdot \frac{\lambda_r}{\lambda} \right\},$$

$$(5,9b) \quad \beta_{Dg}^{(e)} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 - \varepsilon_1} \cdot \frac{\pi}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} \delta_0 \cdot \left\{ \frac{\lambda^2}{\lambda_r^2} \cdot \frac{d\lambda_r}{d\lambda} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \cdot \frac{\lambda_r}{\lambda} \right\}.$$

Füllt im Falle der Gl. (5,9a) das homogene Dielektrikum mit der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1$  den Hohlleiter zur Gänze aus, so ist nach Abschn. 1

$$\frac{\lambda^2}{\lambda_r^2} \cdot \frac{d\lambda_r}{d\lambda} - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\lambda_r}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_r} - \frac{\lambda_r}{\lambda} \left( \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - \left( \frac{j_{01} \cdot \lambda}{2\pi b} \right)^2 \right),$$

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} - \left( \frac{j_{01} \cdot \lambda}{2\pi b} \right)^2 = \left( \frac{\lambda}{\lambda_r} \right)^2 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}$$

und für  $\beta_{D_g}^{(e)}$  entsteht dann in der Tat die frühere Gl. (1,3a).

Bei dieser Gelegenheit mag auch noch erwähnt werden, daß die in den obigen Gleichungen vorkommenden beiden Größen  $\lambda_r/\lambda$  und  $d\lambda_r/d\lambda$  in engem Zusammenhang stehen mit der Phasen- und der Gruppengeschwindigkeit der Hohlleiterwellen. Nach Gl. (2,2) ist nämlich im vorliegenden Falle die Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = \omega/\alpha$ . Wegen  $\omega = k \cdot c = 2\pi c/\lambda$  und  $\alpha = 2\pi/\lambda_r$  ist daher

$$(5,9\alpha) \quad \frac{v_{ph}}{c} = \frac{\lambda_r}{\lambda}.$$

In allen Punkten oberhalb der Geraden  $\lambda_r = \lambda$  von Abb. 10 ist also die Phasengeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit. Die Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  ist definitionsgemäß gleich  $v_{ph} - \lambda_r \cdot \frac{dv_{ph}}{d\lambda_r}$ . Es besteht mithin für sie auch die Beziehung:

$$(5,9\beta) \quad \frac{v_g}{c} = \frac{\lambda_r^2}{\lambda^2} \cdot \frac{d\lambda}{d\lambda_r}.$$

Die Gl. (5,9a, b) weisen gegenüber der Gl. (5,6) und ihren Abwandlungen den großen Vorteil auf, daß sie für die Berechnung des Dämpfungsmaßes einer  $TE_{n0}$ -Welle in einem zweifach geschichteten konzentrischen Hohlleiter eine weit anschaulichere Vorschrift geben als jene. Die Berechnung von  $\beta$  wird durch sie unmittelbar an das Kurvenbild 15 angeschlossen. Da sich jedoch aus einer nur graphisch gegebenen Kurve der Zahlenwert für die erste Ableitung nur sehr ungenau bestimmen läßt, so ist der Nutzen, den man aus den Gl. (5,9a, b) für die zahlenmäßige Berechnung ziehen kann, nur sehr gering zu bewerten. Auch die Hoffnung, daß es vielleicht möglich sein könne, mit Hilfe dieser Gleichungen zu einer Angabe über die Lage des Minimums von  $\beta_{D_g}$  zu gelangen, erweist sich als trügerisch. Dennoch dürfte es nicht ohne Interesse gewesen sein, auf die Möglichkeit der lebendigeren Darstellung von  $\beta$  durch (5,9) hingewiesen zu haben.

Im Abschn. 4,21 konnte insbesondere für die charakteristische Gleichung einer  $TM_{n0}$ -Welle eine gut brauchbare Näherungslösung in Gestalt einer expliziten Darstellung des Fortpflanzungsmaßes



erzielt werden, wenn das Verhältnis  $\varepsilon_1/\varepsilon_0$  oder  $\varepsilon_0/\varepsilon_1$  von Natur aus genügend klein ist. Selbstverständlich ist es in diesem Falle auch ohne weiteres möglich, einen expliziten Näherungsausdruck für die Dämpfung herzuleiten. Wir wollen uns bei der Angabe dieser Näherungsformeln von vornherein auf die Annahme beschränken, daß stets nur eines der beiden Dielektrika verlustbehaftet ist.

Es sei zunächst  $\varepsilon_1/\varepsilon_0 \ll 1$  mit  $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon$ . In der Gl. (4,14b) ist dann allein  $\varepsilon_0$  durch  $\varepsilon_0 \cdot (1 + i \cdot \operatorname{tg} \delta_0)$  zu ersetzen. Da es wegen der Kleinheit des Korrekturgliedes  $\sigma_n \cdot j_{0n}$  in dieser Gleichung und wegen des in noch höherer Ordnung kleinen  $\operatorname{tg} \delta_0$  keinen Sinn hätte, diesen Ersatz von  $\varepsilon_0$  etwa auch noch in den den Faktor  $\sigma_n$  zusammensetzenden Größen berücksichtigen zu wollen, so ist nur eine ganz einfache Rechnung nötig, um zu dem Ausdruck für die dielektrische Dämpfung einer  $TM_{n0}$ -Welle zu gelangen. Es wird nämlich

$$(5,10\beta) \quad \beta_{Dg}^{(m)} \approx \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2} \cdot \operatorname{tg} \delta_0}{\left\{1 - \left(\frac{\lambda}{2\pi a}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot (j_{0n}^2 + 2\sigma_n j_{0n})\right\}^{1/2}} \quad \text{N/cm.}$$

Für das Minimum der Dämpfung ergibt sich daraus unmittelbar die einfache Beziehung:

$$(5,10\alpha) \quad [\beta_{Dg}^{(m)}]_{\min} \approx \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{a} \cdot \{j_{0n}^2 + 2\sigma_n j_{0n}\}^{1/2} \quad \text{N/cm.}$$

Die Formel (5,10a) ist mit Sicherheit gültig, solange  $\frac{\lambda j_{0n}}{2\pi a} < 1$  ist, und sie ist um so genauer, je kleiner  $\lambda$  ist.

Ist umgekehrt  $\varepsilon/\varepsilon_1 \ll 1$ , so entsteht für die Dämpfung auf die gleiche Weise der Ausdruck

$$(5,11\alpha) \quad \beta_{Dg}^{(m)} \approx \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\operatorname{tg} \delta_1 \cdot (\varepsilon_1/\varepsilon)^{1/2}}{\left\{1 - \left(\frac{\lambda}{2\pi a}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \cdot (y_n^2 + 2\varrho_n y_n)\right\}^{1/2}} \quad \text{N/cm,}$$

mit dem Minimum

$$(5,11\beta) \quad [\beta_{Dg}^{(m)}]_{\min} \approx \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{a} \{y_n^2 + 2\varrho_n \cdot y_n\}^{1/2}.$$

Auch diese Formel ist mindestens gültig für alle  $\frac{\lambda \cdot y_n}{2\pi a} < 1$ .

Schließlich wollen wir hier auch noch die besonderen Dämpfungsformeln angeben, die in dem im Abschn. 4,3 besprochenen Grenzfall eines kleinen Wertes von  $a/b$  gelten. Um uns dabei nicht zu sehr in Einzelheiten zu verlieren, machen wir auch diesmal von vornherein die Annahme, daß jeweils nur eines der beiden Dielektrika Verluste aufweist, während das andere von der Luft gebildet wird.

Für die dielektrische Dämpfung einer  $TE_{n0}$ -Welle lassen sich dann sofort nach dem Ersatz von  $\varepsilon_0$  oder  $\varepsilon_1$  durch  $(\varepsilon_0, \varepsilon_1) \cdot (1 + i \cdot \operatorname{tg} \delta_{0,1})$  aus der Gl. (4,15a) die folgenden beiden Formeln ablesen:

$$(5,12a) \left\{ \begin{aligned} \beta_{Dg}^{(e)} &\approx \frac{\operatorname{tg} \delta_1 \cdot k_1^2}{2\alpha^{(e)}} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{a}{b} \right)^4 \cdot \frac{2b^2(k_1^2 - k_0^2) - j_{0n}^{\prime 2}}{j_0^2(j_{0n}')^2} \right] \\ &\quad \left( \varepsilon_1 > \varepsilon_0 = \varepsilon, \frac{a}{b} \ll 1 \right), \end{aligned} \right.$$

$$(5,12b) \left\{ \begin{aligned} \beta_{Dg}^{(e)} &\approx \frac{\operatorname{tg} \delta_0 \cdot k_0^2}{2\alpha^{(e)}} \cdot \frac{1}{8} \cdot \left( \frac{a}{b} \right)^4 \cdot \frac{j_{0n}^{\prime 2} - 2b^2(k_0^2 - k_1^2)}{j_0^2(j_{0n}')^2} \\ &\quad \left( \varepsilon_0 > \varepsilon_1 = \varepsilon, \frac{a}{b} \ll 1 \right). \end{aligned} \right.$$

Hierin bedeutet  $\alpha^{(e)}$  den durch Gl. (4,15a) gegebenen Ausdruck für das Fortpflanzungsmaß einer  $TE_{n0}$ -Welle im zweifach konzentrisch geschichteten Hohlleiter.

Für die dielektrische Dämpfung einer  $TM_{n0}$ -Welle ergeben sich unter den gleichen Voraussetzungen aus der Gl. (4,16a) die beiden Ausdrücke (5,13a, b), in denen  $\alpha^{(m)}$  die aus (4,16a) bekannte Größe ist.

$$(5,13a) \quad \beta_{Dg}^{(m)} \approx \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{2\alpha^{(m)}} \cdot \left[ k_1^2 - \left( \frac{a}{b} \right)^2 \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \cdot \frac{(j_{0n}/b)^2}{j_1^2(j_{0n}')^2} \right] \quad \left( \varepsilon_1 > \varepsilon_0 = \varepsilon, \frac{a}{b} \ll 1 \right),$$

$$(5,13b) \quad \beta_{Dg}^{(m)} \approx \frac{\operatorname{tg} \delta_0}{2\alpha^{(m)}} \cdot \left( \frac{a}{b} \right)^2 \cdot \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \cdot \frac{(j_{0n}/b)^2}{j_1^2(j_{0n}')^2} \quad \left( \varepsilon_0 < \varepsilon_1 = \varepsilon, \frac{a}{b} \ll 1 \right).$$

Die beiden Gl. (5,12b) und (5,13b) sind aus den früher angegebenen Gründen nur so lange gültig, als  $w_1$  reell und größer als Null ist, und also  $0 < \alpha^{(e)}, \alpha^{(m)} < k_1$  ist. Die dielektrische Dämpfung, die ein dünner, zylindrischer Stab aus verlustbehaftetem dielektrischen Material innerhalb eines sonst mit verlustfreiem Werkstoff angefüllten Hohlleiters verursacht, macht sich danach in dem unmittelbar auf die kritische Frequenz folgenden Frequenzbereich bei den  $TE$ -Wellen in weit geringerem Maße bemerkbar als bei den  $TM$ -Wellen.

#### 6. Die Dämpfung der axialsymmetrischen Wellen infolge der Wärmeverluste in der Wandung

Außer den Umelektrisierungsverlusten treten natürlich auch in einem Hohlleiter mit geschichtetem Dielektrikum infolge der Wandströme noch Wärmeverluste in der Wandung auf. Diese Wandströme verlaufen im allgemeinen teils rein axial, teils rein zirkular, und sie hängen bekanntlich mit den Randwerten der magnetischen Feldstärke über die Gl. (6,1a, b) zusammen. Bezeichnet dann  $Q_M$  die gesamte

$$(6,1a) \quad j_z(\varphi) = -\mathfrak{H}_\varphi(b, \varphi),$$

$$(6,1b) \quad j_\varphi(\varphi) = \mathfrak{H}_z(b, \varphi)$$

Größe dieser Art Wärmeverluste in  $W/\text{cm}$  und  $S_z$  den totalen Energiestrom in  $W$ , der in Richtung der  $z$ -Achse den Querschnitt des Hohlleiters passiert, so berechnet sich die durch diese Wärmeverluste hervorgerufene Dämpfung  $\beta_M$  der Hohlleiterwellen, wie aus energetischen Betrachtungen folgt, nach der einfachen Formel:

$$(6,2) \quad \beta_M = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_M}{S_z} \quad N/\text{cm}.$$

Beide hier berücksichtigten Arten der Dämpfung können ohne merklichen Fehler unabhängig voneinander berechnet werden, so daß dann die gesamte Dämpfung, die eine Hohlleiterwelle bei ihrem Lauf durch den Hohlleiter erfährt, einfach der Summe der beiden Teildämpfungen gleichgesetzt werden darf.

Wir berechnen zunächst die Dämpfung  $\beta_M^{(e)}$  einer transversal elektrischen  $TE_{n0}$ -Welle. Nach den Gl. (2,2) haben wir es bei einer solchen Welle allein mit einer zirkularen Wandströmung zu tun, für die die einfache Gl. (6,3) besteht. Mit  $d = \left(\frac{\omega \mu \sigma}{2}\right)^{-1/2}$  als dem

$$(6,3) \quad j_\varphi(\varphi) = \frac{2 \omega_1}{i \omega \mu \cdot \pi b} \cdot A_1^{(e)} \cdot e^{i a \varphi}$$

Eindringmaß in Zentimeter berechnen sich die je Längeneinheit des Hohlleiters durch diesen Wandstrom erzeugten Wärmeverluste auf Grund einer bekannten Hilfsvorstellung in erster Näherung gemäß der Gl. (6,4).

$$(6,4) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_M^{(\varphi)} &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} j_\varphi(\varphi) \cdot \overline{j_\varphi(\varphi)} \cdot \frac{b \cdot d \varphi}{(1 \cdot d) \sigma} = \frac{4}{\pi b} \cdot \left(\frac{\omega \mu}{2 \sigma}\right)^{1/2} \cdot \frac{\omega_1 \cdot \overline{\omega_1}}{\omega^2 \mu^2} \\ &\quad \cdot A_1^{(e)} \cdot \overline{A_1^{(e)}} \quad W/\text{cm}. \end{aligned} \right.$$

Für den in Richtung der  $z$ -Achse fließenden Energiestrom besteht im vorliegenden Falle die Formel (6,5), da bei einer axial-

$$(6,5) \quad S_z = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^b \mathfrak{E}_\varphi \cdot \overline{\mathfrak{H}_r} \cdot r dr \cdot d\varphi = -\pi \cdot \int_0^b \mathfrak{E}_\varphi \cdot \overline{\mathfrak{H}_r} \cdot r \cdot dr \quad W$$

symmetrischen  $TE$ -Welle die einzigen von Null verschiedenen Komponenten der beiden Feldgrößen von  $\mathfrak{E}_\varphi$ ,  $\mathfrak{H}_r$  und  $\mathfrak{H}_z$  gebildet werden. Über die Gl. (2,2) und (2,3) folgt hieraus im Hinblick auf den Umstand, daß in den Querschnittsbereichen  $0 \leq r \leq a$  und  $a \leq r \leq b$  für  $\mathfrak{E}_\varphi$  und  $\mathfrak{H}_r$  verschiedene Formeln gelten, die genauere Berechnungsvorschrift (6,5a). Die Überstreichungen einzelner Faktoren in dieser

$$(6,5a) \quad \left\{ \begin{aligned} S_z &= \frac{\pi \pi}{\omega \mu} \cdot \left\{ \overline{\omega_0} \cdot \overline{\omega_0} \cdot A_0^{(e)} \cdot \overline{A_0^{(e)}} \cdot \int_0^a J_1(r \omega_0) \cdot \overline{J_1(r \omega_0)} \cdot r \cdot dr + \overline{\omega_1} \cdot \omega_1 \right. \\ &\quad \cdot A_1^{(e)} \cdot \overline{A_1^{(e)}} \cdot \int_0^b \left| \begin{array}{cc} J_1(r \omega_1) & Y_1(r \omega_1) \\ J_1(b \omega_1) & Y_1(b \omega_1) \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} J_1(r \omega_1) & Y_1(r \omega_1) \\ J_1(b \omega_1) & Y_1(b \omega_1) \end{array} \right| \cdot r \cdot dr \left. \right\} \end{aligned} \right.$$

Gleichung, die wie üblich vorschreiben, daß für die betreffende Größe der konjugiert komplexe Wert zu nehmen ist, berücksichtigen das nach Abschn. 4 durchaus mögliche Eintreten des Falles, daß  $w_0$  oder  $w_1$  außer reellen Werten auch rein imaginäre Werte annehmen können. Da nun aber in beiden Wertbereichen von  $w_0$  und  $w_1$  sowohl die Funktion  $w_0 \cdot J_1(rw_0)$  als auch gemäß dem Übergang von (4,1b) zu (4,1c) die unter dem Integralzeichen von (6,6b) auf-

$$(6,6a) \quad w_0 \cdot \overline{w_0} \cdot \int_0^a J_1(rw_0) \cdot \overline{J_1(rw_0)} \cdot r \cdot dr = \frac{a^2 w_0^2}{2} [J_1^2(aw_0) - J_0(aw_0) J_2(aw_0)],$$

$$(6,6b) \quad \left\{ w_1 \cdot \overline{w_1} \cdot \int_a^b \left| \frac{J_1(rw_1) Y_1(rw_1)}{J_1(bw_1) Y_1(bw_1)} \right| \cdot \left| \frac{J_1(rw_1) Y_1(rw_1)}{J_1(bw_1) Y_1(bw_1)} \right| \cdot r \cdot dr = \frac{a^2 \cdot |w_1|^2}{2} \right. \\ \left. \cdot \left\{ \frac{4}{\pi^2 a^2 w_1^2} + \left| \frac{J_0(aw_1) Y_0(aw_1)}{J_1(bw_1) Y_1(bw_1)} \right| \cdot \left| \frac{J_2(aw_1) Y_2(aw_1)}{J_1(bw_1) Y_1(bw_1)} \right| - \left| \frac{J_1(aw_1) Y_1(aw_1)^2}{J_1(bw_1) Y_1(bw_1)} \right| \right\} \right.$$

tretende Determinante stets selbst reelle Werte haben, so dürfen die Gl. (6,6a, b) für jedes  $w_0$ ,  $w_1$  der angegebenen Art als gültig angesehen werden. Nach der Zusammenfassung dieser Gleichungen zu dem Ausdruck (6,5a) kann man nun einmal Gebrauch machen von der Beziehung (2,7b) zwischen den Koeffizienten  $A_0^{(e)}$  und  $A_1^{(e)}$  und außerdem von dem Bestehen der charakteristischen Gl. (2,8a). Die erste Möglichkeit erlaubt es, den Faktor  $A_1^{(e)} \cdot A_1^{(e)}$  vor die Klammer zu ziehen, die zweite gestattet die Elimination der Funktionen mit dem Argument  $aw_0$ . Auf diese Weise entsteht schließlich im Endergebnis für die Dämpfung einer  $TE_{n0}$ -Welle infolge der Stromwärmeverluste in der Wandung die sowohl für rein reelle als auch für rein imaginäre Werte von  $w_0$  oder  $w_1$  gültige Formel (6,7). Die

$$(6,7) \quad \left\{ \beta_M^{(e)} = \frac{\omega \varepsilon_1}{ab} \cdot \frac{w_1^2}{k_1^2} \cdot \left( \frac{\omega \mu}{2q} \right)^{1/2} \cdot \left[ 1 - \frac{\pi^2 a^2 (k_1^2 - k_n^2)}{4} \cdot \frac{w_1^2}{w_0^2} \cdot \left| \frac{J_0(aw_1) Y_0(aw_1)}{J_1(bw_1) Y_1(bw_1)} \right| \cdot \left| \frac{J_2(aw_1) Y_2(aw_1)}{J_1(bw_1) Y_1(bw_1)} \right| \right]^{-1} \right.$$

Abhängigkeit des  $\beta_M$  von der Ordnungszahl  $n$  kommt in dieser Gleichung nach den Ausführungen im Abschn. 4 durch die Wahl der  $w_0$ - und  $w_1$ -Werte zum Ausdruck. Geht in (6,7)  $\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon_0$  oder  $a \rightarrow 0$ , so entartet sie, wie es sein muß, in die bekannte einfache Beziehung für die Dämpfung  $\beta_M$  einer  $TE_{n0}$ -Welle in einem Hohlleiter mit homogenem Dielektrikum. Der Wert  $w_1 = 0$ , der ja für ein  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  tatsächlich erreicht wird, liefert für  $\beta_M^{(e)}$  nicht etwa einen verschwindenden Betrag, wie man zunächst glauben könnte, sondern gemäß Gl. (6,7a) einen von Null durchaus verschiedenen

$$(6,7a) \quad \beta_M^{(a)} = \frac{\omega \varepsilon_1}{b k_1} \cdot \frac{k_0^2 - k_1^2}{k_1^2} \cdot \frac{(\omega \mu / 2 \sigma)^{1/2}}{1 + \frac{1}{8} \cdot b^2 (k_0^2 - k_1^2) \cdot \left[ 4 \cdot \ln \frac{b}{a} - \left( 1 - \frac{a^4}{b^4} \right) \right]} \quad \begin{matrix} a > 0 \\ w_1 = 0, \alpha = k_1 \end{matrix}$$

$$(6,7b) \quad \beta_M^{(a)} = \frac{\omega \varepsilon_1}{b k_0} \cdot \frac{k_1^2 - k_0^2}{k_1^2} \cdot \left( \frac{\omega \mu}{2 \sigma} \right)^{1/2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\pi^2 a^4 (k_1^2 - k_0^2)^2}{32} \cdot \left| \frac{J_0(a w_1) Y_0(a w_1)}{J_1(b w_1) Y_1(b w_1)} \right|^2 \right\}^{-1} \quad \begin{matrix} a > 0 \\ w_0 = 0, \alpha = k_0 \end{matrix}$$

Ausdruck, da in (6,7) für  $w_1 = 0$  auch der Nenner verschwindet. Den gleichfalls von Null verschiedenen Grenzwert von  $\beta_M^{(a)}$  für  $w_0 = 0$  stellt die Gl. (6,7b) dar.

Die Dämpfung  $\beta_M^{(m)}$  der transversal magnetischen  $TM_{n0}$ -Welle wird im Gegensatz zu dem eben besprochenen Fall durch eine rein axiale Wandströmung verursacht, für die die Gl. (6,8) besteht. Die

$$(6,8) \quad j_z(\varphi) = \frac{2}{\pi b} A_1^{(m)} \cdot e^{i \alpha z}$$

Wärmeverluste in der Wandung bestimmen sich mithin je Längeneinheit des Hohlleiters nach der Gl. (6,9).

$$(6,9) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_M^{(a)} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} j_z(\varphi) \cdot d\varphi \cdot \overline{j_z(\varphi)} \cdot d\varphi \cdot \frac{1}{(b \cdot d\varphi \cdot d) \cdot \sigma} \\ &= \frac{4}{\pi b} \cdot \left( \frac{\omega \mu}{2 \sigma} \right)^{1/2} \cdot A_1^{(m)} \cdot \overline{A_1^{(m)}} \quad W/cm. \end{aligned} \right.$$

Da andererseits bei einer  $TM_{n0}$ -Welle die einzigen von Null verschiedenen Komponenten des Feldes die Größen  $\mathfrak{H}_\varphi$ ,  $\mathfrak{E}_r$  und  $\mathfrak{E}_z$  sind, so ist der Berechnung der  $z$ -Komponente des Energiestroms durch den gesamten Querschnitt des Hohlleiters die Formel (6,10) oder in ausgeschriebener Form

$$(6,10) \quad S_z = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^b \mathfrak{E}_r \cdot \overline{\mathfrak{H}_\varphi} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi = \pi \cdot \int_0^b \mathfrak{E}_r \cdot \overline{\mathfrak{H}_\varphi} \cdot r \cdot dr,$$

$$(6,10a) \quad \left\{ \begin{aligned} S_z &= \pi \alpha \cdot \left\{ \frac{w_0 \cdot \overline{w_0}}{\omega \varepsilon_0} \cdot A_0^{(m)} \cdot \overline{A_0^{(m)}} \cdot \int_0^a J_1(r w_0) \cdot \overline{J_1(r w_0)} \cdot r \cdot dr \right. \\ &+ \frac{w_1 \cdot \overline{w_1}}{\omega \varepsilon_1} \cdot A_1^{(m)} \cdot \overline{A_1^{(m)}} \\ &\cdot \left. \int_a^b \left| \frac{J_1(r w_1) Y_1(r w_1)}{J_0(b w_1) Y_0(b w_1)} \right| \cdot \left| \frac{J_1(r w_1) Y_1(r w_1)}{J_0(b w_1) Y_0(b w_1)} \right| \cdot r \cdot dr \right\} \end{aligned} \right.$$

die Gl. (6,10a) zugrunde zu legen. Nun ist in 6,10a) die mit  $w_1$  multiplizierte Determinante in dem Integral mit den Grenzen  $a$  und  $b$

stets eine reelle Größe, gleichgültig ob  $w_1$  rein reell oder rein imaginär ist. Demgemäß besteht die Gl. (6,11) unabhängig von der Wertigkeit von

$$(6,11) \quad \left\{ w_1 \cdot \overline{w_1} \cdot \int_a^b \left| \frac{J_0(rw_1) Y_0(rw_1)}{J_1(rw_1) Y_1(rw_1)} \right| \cdot \left| \frac{J_0(rw_1) Y_0(rw_1)}{J_1(rw_1) Y_1(rw_1)} \right| \cdot r \cdot dr = \frac{2}{\pi^2} \right. \\ \left. - \frac{a^2 w_1^2}{2} \cdot \left\{ \left| \frac{J_1(aw_1) Y_1(aw_1)}{J_0(bw_1) Y_0(bw_1)} \right|^2 - \left| \frac{J_0(aw_1) Y_0(aw_1)}{J_0(bw_1) Y_0(bw_1)} \right| \cdot \left| \frac{J_2(aw_1) Y_2(aw_1)}{J_2(bw_1) Y_0(bw_1)} \right| \right\} \right.$$

$w_1$ , und es ist nötigenfalls lediglich erforderlich, die darin auftretenden Determinanten entsprechend den früher an Gl. (4,1 a) vorgenommenen Änderungen umzugestalten. Die weiteren Umformungen der Gl. (6,10 a) lassen sich in ganz ähnlicher Weise wie im Anschluß an die Gl. (6,6 b) mit Hilfe der Gl. (2,7 a) und der charakteristischen Gleichung  $\Delta_0^{(m)} = 0$  bewerkstelligen. Für die Dämpfung einer  $TM_{n0}$ -Welle infolge der Stromwärmeverluste entsteht damit die sowohl für rein reelle als auch für rein imaginäre Werte von  $w_0$  und  $w_1$  gültige Formel (6,12). Geht in dieser Gleichung  $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_0$  oder  $a \rightarrow 0$ , so reduziert

$$(6,12) \quad \left\{ \beta_M^{(m)} = \frac{\omega s_1}{a b} \cdot \left( \frac{\omega \mu}{2 \sigma} \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{4} \left( 1 - \frac{s_0}{s_1} \right) \cdot \left| \frac{J_0(aw_1) Y_0(aw_1)}{J_0(bw_1) Y_0(bw_1)} \right|^2 \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{w_1^2}{w_0^2} \cdot \left[ \frac{s_0}{s_1} \cdot a^2 w_1^2 \cdot \frac{J_1^2(aw_0)}{J_0^2(aw_0)} - a^2 w_0^2 - a^2 k_0^2 \cdot \frac{J_2^2(aw_0)}{J_0^2(aw_0)} \right] \right\}^{-1} N/\text{cm}, \right.$$

sich  $\beta_M^{(m)}$  auf den vor der geschweiften Klammer stehenden Faktor, und dieser entspricht, wie es sein muß, dem bekannten Ausdruck für die von den Wärmeverlusten verursachte Dämpfung einer  $TM_{n0}$ -Welle in einem Hohlleiter mit homogenem Dielektrikum. Die Stellen  $w_0 = 0$  und  $w_1 = 0$  verlangen im vorliegenden Falle keine besondere Berücksichtigung, da sich  $\beta_M^{(m)}$  daselbst durchaus regulär verhält.

#### 7. Die Dämpfungskurven der beiden niedrigsten axialsymmetrischen $TE_{n0}$ -Wellen

Die in den voranstehenden beiden Abschnitten hergeleiteten Formeln mögen uns nunmehr dazu dienen, den Verlauf der durch die dielektrischen und durch die Strömungsverluste verursachten Dämpfung auch numerisch zu berechnen. Als Wellentypus wählen wir die axialsymmetrische  $TE_{n0}$ -Welle, deren elektrische Kraftlinien konzentrische Kreisinge bilden. Nach Abschnitt 2 kann diese Wellenart unabhängig von der  $TM_{n0}$ -Welle bestehen, und für ihre drei Feldkomponenten gelten danach in den drei Raumteilen  $0 \leq r \leq a$  und  $a \leq r \leq b$  die folgenden beiden Gleichungssätze:



Es ist von dem gemeinsamen Faktor  $\exp(i\alpha z - i\omega t)$  in allen sechs Gleichungen abgesehen

im Raum  $0 \leq r \leq a$ , im Raum  $a \leq r \leq b$ ,

$$(7,1a) \quad \mathfrak{E}_\varphi = A_0^{(e)} \cdot w_0 J_1(rw_0), \quad (7,1\alpha) \quad \mathfrak{E}_\varphi = -A_1^{(e)} \cdot w_1 \left| \frac{J_1(rw_1) Y_1(rw_1)}{J_1(bw_1) Y_1(bw_1)} \right|,$$

$$(7,2a, \alpha) \quad \mathfrak{H}_r = -\frac{\alpha}{\omega \mu} \cdot \mathfrak{E}_\varphi, \quad (\mu_0 = \mu_1 = \mu),$$

$$(7,3a) \quad \mathfrak{H}_z = A_0^{(e)} \cdot \frac{w_0^2}{i\omega \mu} \cdot J_0(rw_0), \quad (7,3\alpha) \quad \mathfrak{H}_z = -A_1^{(e)} \cdot \frac{w_1^2}{i\omega \mu} \cdot \left| \frac{J_0(rw_1) Y_0(rw_1)}{J_1(bw_1) Y_1(bw_1)} \right|.$$

Die beiden hierin vorkommenden und von der Art und der Intensität der Anregung abhängenden Konstanten  $A_0^{(e)}$  und  $A_1^{(e)}$  stehen nach Gl. (2,7b) in dem Zusammenhang:

$$(7,4) \quad a^2 w_0^2 \cdot A_0^{(e)} \cdot J_0(aw_0) = -a^2 w_1^2 \cdot A_1^{(e)} \left| \frac{J_0(bw_1) Y_0(bw_1)}{J_1(bw_1) Y_1(bw_1)} \right|$$

mit  $w_0^2 = k_0^2 - \alpha^2 = k^2 \cdot \frac{\epsilon_0}{\epsilon} - \alpha^2$

und  $w_1^2 = k_1^2 - \alpha^2 = k^2 \cdot \frac{\epsilon_1}{\epsilon} - \alpha^2.$

Die numerische Berechnung der beiden Arten der Dämpfung wurde bei den Abb. 16 und 17 auf den Fall bezogen, daß der innere der den Hohlleiter ausfüllenden beiden Körper mit einem  $b/a = 5$  und einem  $\epsilon_0/\epsilon_1 = \epsilon_0/\epsilon = 16$  das optisch dichtere Medium ist, während bei dem Entwurf der Abb. 18 und 19 die Annahme gemacht wurde, daß der äußere hülsenförmige Körper mit einem  $b/a = 1,25$  und einem  $\epsilon_1/\epsilon_0 = \epsilon_1/\epsilon = 16$  der optisch dichtere ist. Innerhalb dieser beiden Gruppen von Abbildungen betrifft die erste die  $TE_{10}$ - und die zweite die  $TE_{20}$ -Welle. Für den Außenradius  $b$  des Hohlleiters sowie für den Verlustwinkel  $\delta$  und die Leitfähigkeit  $\sigma$  wurden stets die gleichen, in den Abbildungen selbst eingetragenen Werte zugrunde gelegt. Jede Abbildung zeigt, sofern der gewählte Maßstab überhaupt noch einen Unterschied in dem Verlauf der Kurven zu machen gestattet, den Gang der beiden Dämpfungskomponenten  $\beta'_{Mg}$  und  $\beta^{(e)}_{Dg}$  mit der zur Frequenz proportionalen Größe  $2\pi b/\lambda$  sowohl einzeln als auch in der Summe. Um die Möglichkeit zu einem bequemen Vergleich zu geben, wurde noch außerdem in jedes der vier Abbildungen auch der Verlauf der zu der gleichen Wellenordnung gehörenden Dämpfungskomponente  $\beta_M$  für einen Hohlleiter mit dem einzigen Dielektrikum Luft eingetragen. Für einen solchen Hohlleiter stellt diese Dämpfungskomponente zugleich die gesamte Dämpfung dar.

Selbstverständlich liegt in allen vier Fällen die dem ungefüllten Hohlleiter entsprechende kritische Grenzfrequenz bei höheren Werten von  $2\pi b/\lambda$  als bei den Hohlleitern mit dielektrischem Einsatz. Für die Ordinate, die die Dämpfung in N/km angibt, wurde stets der gleiche Maßstab benutzt.

Aus den Abb. 16 und 17, die sich auf den Hohlleiter dem optisch dichteren Medium im Bereich der Achse beziehen, ist

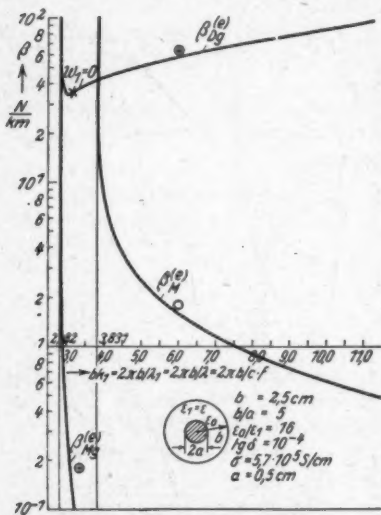


Abb. 16. Die totale Dämpfung und ihre beiden Dämpfungskomponenten bei einer  $TE_{10}$ -Welle in Abhängigkeit von der Frequenz

zunächst zu ersehen, daß hier die Dämpfung in der Hauptsache dielektrischer Natur ist. Das magnetische Feld muß demnach in diesem Fall in dem äußeren ringförmigen Bereich so schwach sein, daß es keine Wandströme von merklicher Größe zu erzeugen vermag. Obgleich also die Dämpfungskomponente  $\beta_M$  im vorliegenden Falle fast ganz zurücktritt, liegt trotzdem im gemeinsamen Durchlaßbereich des gefüllten und ungefüllten Hohlleiters die Dämpfung des erstern stets wesentlich höher als die des letzteren. Dieses Ergebnis entspricht zwar nicht dem erhofften Erfolg, es enthält aber jedenfalls auch nichts

Überraschendes. Ziehen wir

jetzt aber auch noch den Verlauf der Dämpfungskurven bei der  $TE_{20}$ -Welle in den Kreis der Betrachtungen mit hinein, so zeigt sich hierbei die schwerlich vorauszusehende Absonderlichkeit, daß die Dämpfungskurve nach Eintritt in den Durchlaßbereich des Hohlleiters zunächst bei der Frequenz  $2\pi b/\lambda = 5,6$  durch ein ziemlich scharf ausgeprägtes Minimum von 3,2 N/km hindurchgeht. Darnach steigt sie wieder ziemlich steil an, erreicht bei  $2\pi b/\lambda = 7,6$  ein flaches relatives Maximum von 130 N/km, um sich dann nach einem anfänglichen leichten Absinken allmählich immer mehr einer zu unendlich großen Dämpfungswerten führenden asymptotischen Kurve zu nähern. Durch das Hinzutreten der dielektrischen Dämpfungskomponente  $\beta_{Dg}$

geht demnach auch in den vorliegenden Fällen sowohl der  $TE_{10}$ - als auch der  $TE_{20}$ -Welle wie überhaupt jeder  $TE_{n0}$ -Welle die für sie bei einem nur mit Luft angefüllten Hohlleiter so charakteristische Eigenschaft verloren, daß ihre Dämpfung mit zunehmender Frequenz stetig gegen Null geht. Bei der  $TE_{20}$ -Welle gibt es jedoch nach Abb. 17 trotzdem einen gar nicht einmal schmalen Frequenzbereich in dem sogar die totale Dämpfung ihrem Betrage nach noch unterhalb der Dämpfung  $\beta_M$  der  $TE_{10}$ -Welle des homogenen Hohlleiters liegt. Dabei gehören allerdings diesem Frequenzbereich nicht die gleichen, sondern kleinere Frequenzen an, was aber von unserem Standpunkt aus nur als erwünscht anzusehen ist. Vergleicht man andererseits die Dämpfungskurve der  $TE_{20}$ -Welle mit Einsatz mit der in Abb. 17 gestrichelt eingezeichneten Dämpfungskurve der  $TE_{10}$ -Welle in einem luftgefüllten Hohlleiter von Abb. 16, so ist ihr gegenüber natürlich der Hohlleiter mit Einsatz im Nachteil.

Von den früheren Abschnitten her dürfte noch die besondere Rolle, die dem Verschwinden eines

der Wurzelausdrücke  $w_0$  oder  $w_1$  zukommt, in Erinnerung sein. Bei wachsenden Werten von  $\alpha$  geht an dieser Stelle der betreffende Wurzelwert von rein imaginären Werten über. Die Lage dieses Punktes, die, nachdem einmal die physikalischen und geometrischen Daten des Hohlleiters festliegen, nur allein noch von der Frequenz abhängt, wurde auf allen vier Abb. 16—19 auf der Kurve für die Dämpfung  $\beta_{Dg}$  durch ein Kreuz besonders hervorgehoben. Für die anderen Kurven liegt sie natürlich über derselben Abzisse. Da für  $w_1 = 0$ ,  $\alpha = k_1$  ist, so entspricht dieser Frequenz eine Hohlleiter-

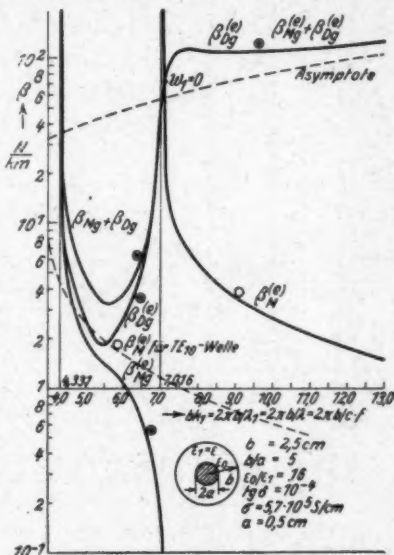


Abb. 17. Die totale Dämpfung und ihre beiden Dämpfungskomponenten bei einer  $TE_{20}$ -Welle in Abhängigkeit von der Frequenz

welle, die sich mit der dem Medium  $k_1$  eignen Lichtgeschwindigkeit fortpflanzt, und es steht daher zu erwarten, daß in diesem Fall das Hohlleiterfeld besonders einfachen Gesetzen gehorcht. Das trifft auch in der Tat zu, wie sich sogleich zeigen wird.

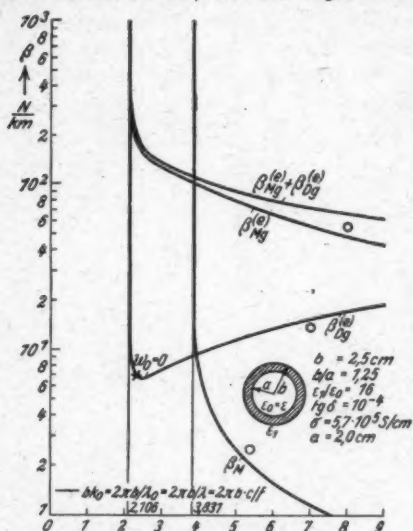


Abb. 18. Die totale Dämpfung und ihre beiden Dämpfungskomponenten bei einer  $TE_{10}$ -Welle in Abhängigkeit von der Frequenz.

[An der Abszisse muß stehen  $f/c$  statt  $c/f$ ]

Da für  $w_1 = 0$  die auf der rechten Seite von (7,4) stehende Determinante gegen den Grenzwert  $-2/\pi b w_1$  strebt, die linke Seite dieser Gleichung aber auf jeden Fall endlich bleiben muß, so muß offenbar für  $w_1 \rightarrow 0$  der Amplitudenfaktor  $A_1^{(e)}$  in der Weise unendlich groß werden, daß sein Produkt mit  $w_1$  dabei endlich bleibt, und den durch Gl. (7,5) angegebenen Wert annimmt, denn für  $w_1 = 0$  wird

$$w_0 = k_0^2 - k_1^2.$$

Für drei Feldkomponenten  $\mathfrak{H}_z$ ,  $\mathfrak{H}_r$  und  $\mathfrak{E}_\varphi$  besteht dann aber nach den Gl. (7,1—3) in dem

$$(7,5) \quad [A_1^{(e)} \cdot w_1]_{w_1=0} = \frac{\pi b}{2} \cdot k^2 \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1 \right) \cdot J_0 \left( a k \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon} - 1} \right) \cdot A_0^{(e)}$$

ringförmigen Bereich  $a \equiv r \leq b$  die folgende einfache Gesetzmäßigkeit:

$$(7,6a) \quad \mathfrak{H}_z = (A_1^{(e)} \cdot w_1) \cdot \frac{2 e^{i k_1 z}}{\pi b \cdot i \omega \mu} \quad (7,6b) \quad \mathfrak{E}_\varphi = -(A_1^{(e)} w_1) \cdot \frac{e^{i k_1 z}}{\pi} \cdot \left( \frac{b}{r} - \frac{r}{b} \right)$$

$$(7,6c) \quad \mathfrak{H}_r = -\frac{k_1}{\omega \mu} \cdot \mathfrak{E}_\varphi.$$

Die  $z$ -Komponente des magnetischen Feldes besitzt demnach in diesem Fall über den ganzen Querschnitt des ringförmigen Bereichs einen von  $r$  unabhängigen Wert, während die Komponente  $\mathfrak{H}_r$ , die in zeitlicher Quadratur zu  $\mathfrak{H}_z$  liegt, von der Wandung des Hohlleiters aus von Null her ständig zunimmt. Zu einem und demselben

Zeitpunkt hat also die Komponente  $\beta_z$  in dem Bereich  $a \leq r \leq b$  stets die gleiche Richtung, und dasselbe gilt auch für alle rein imaginären Werte von  $w_1$ , wie noch aus Abschnitt 2 bekannt ist. Demnach vollzieht sich also der bei der  $TE_{10}$ -Welle einmalige und bei der  $TE_{20}$ -Welle zweimalige Richtungswechsel von  $\beta_z$  längs der Strecke  $0 \leq r \leq b$  für alle Frequenzen, die  $w_1$  zu Null oder zu einer rein imaginären Größe machen, stets innerhalb des konzentrischen dielektrischen Einsatzes.

Wenden wir uns nunmehr der Erörterung der Abb. 18 und 19 zu, so fällt sogleich als wesentlicher Unterschied zu den ersten beiden Abb. auf, daß bei einem Hohlleiter mit einem hülsenförmigen, bis an die Wandung heranreichenden Einsatz die von den Stromwärmeverlusten in der Wandung herrührende

Dämpfungskomponente wesentlich größer ausfällt als bei der zuerst be-

sprochenen Form des Einsatzes. Das Verhältnis zwischen der Gesamtdämpfung des Hohlleiters mit Einsatz zu der Gesamtdämpfung des Hohlleiters ohne Einsatz gestaltet sich demnach hier bei der  $TE_{10}$ -Welle noch bei weitem ungünstiger als früher. Die Abb. 18 bringt diese sächlich deutlich zum Ausdruck. Die Abb. 19, das sich auf eine  $TE_{20}$ -Welle in dem gleichen Hohlleiter mit hülsenförmigem Einsatz bezieht wie die Abb. 18, läßt an dem Verlauf der beiden Dämpfungskurven in dem an die kritische Frequenz sich anschließenden Frequenzbereich die gleichen charakteristischen Einsattelungen erkennen, die an Abb. 17 auftraten. Das Maximum der totalen Dämpfung erreicht hier allerdings infolge des verschlechternden Einflusses der Dämpfungskomponente  $\beta_N$ , lediglich den immer noch recht beträchtlichen Wert von 50 N/km, und zwar bei einer Frequenz  $2\pi b/\lambda = 5,05$ . Danach wird bei der Frequenz  $2\pi b/\lambda = 6,6$  ein relatives

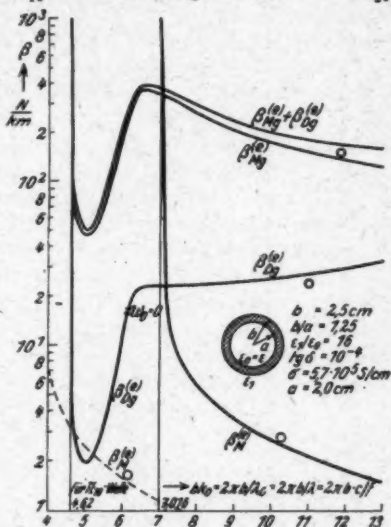


Abb. 19. Die totale Dämpfung und ihre beiden Dämpfungskomponenten bei einer  $TE_{20}$ -Welle in Abhängigkeit von der Frequenz.

[An der Abzisse muß stehen  $f/c$  statt  $c/f$ ]

Dämpfungsmaximum im Betrage von 390 N/km erreicht. Dem darauf folgenden erneuten Absinken der Dämpfung würde sich dann nach dem Passieren eines zweiten, im Bilde nicht mehr sichtbaren relativen Minimums wiederum eine allmählich ständige Zunahme der Dämpfung zu unendlich großen Werten anschließen. Die vergleichsweise auch in dieser Abb. eingetragenen Kurven für die totale Dämpfung eines bloß mit Luft angefüllten Hohlleiters lassen erkennen, daß im vorliegenden Falle dessen günstigere Dämpfungswerte selbst bei Beschränkung auf die  $TE_{20}$ -Welle auch von dem absoluten Minimum der Dämpfung eines Hohlleiters mit hülsenförmigem Einsatz nirgends erreicht werden.

Könnte es bei der zuerst besprochenen Ausführungsform eines Hohlleiters mit Einsatz vorkommen, daß die Wurzelgröße  $w_1$  innerhalb des hier interessierenden Frequenzbereiches zu Null wird, so kann sich jetzt das gleiche bei der Wurzelgröße  $w_0 = (k_0^2 - \alpha^2)^{1/2}$  ereignen, da unter den nunmehr vorliegenden Umständen der innere Raumteil mit  $0 \leq r \leq a$  das optisch dünnere Medium beherbergt. Da für  $w_0 = 0$ ,  $w_1$  endlich bleibt und der Amplitudenfaktor  $A_1^{(e)}$  weder unendlich noch null werden darf, so muß diesmal gemäß Gl. (7,4)  $A_0^{(e)}$  in der Weise unendlich werden, daß dabei in der Grenze selbst das Produkt  $A_0^{(e)} \cdot w_0^2$  endlich bleibt und den durch Gl. (7,7)

$$(7,7) [A_0^{(e)} \cdot w_0^2]_{w_0=0} = -A_1^{(e)} \cdot w_1^2 \cdot \left| \frac{J_0(aw_1)Y_0(aw_1)}{J_1(bw_1)Y_1(bw_1)} \right| \quad \text{mit } w_1^2 = k^2 \left( \frac{a}{b} - 1 \right)$$

angegebenen Wert annimmt. Damit berechnen sich dann für die 3 Feldkomponenten im Raum  $0 \leq r \leq a$  die folgenden sehr einfachen Beziehungen: Es ist

$$(7,8a) \mathfrak{H}_z = \frac{[A_0^{(e)} \cdot w_0^2]}{i\omega\mu} \cdot e^{ik_0 z}$$

$$(7,8b) \mathfrak{E}_\varphi = 1/2 \cdot [A_0^{(e)} \cdot w_0^2] \cdot r \cdot e^{ik_0 z}$$

$$(7,8c) \mathfrak{H}_r = -\frac{k}{\omega\mu} \mathfrak{E}_\varphi.$$

Die Schlußfolgerungen, die aus diesen Gleichungen gezogen werden können, entsprechen mutatis mutandis den früheren Bemerkungen im Anschluß an die Gl. (7,6a...c).

Zum Schluß möchte ich nicht verfehlen, Herrn N. Kasmenkoff für die wertvolle Hilfe, die er mir bei der oft recht schwierigen und zeitraubenden Berechnung der Kurven erwiesen hat, an dieser Stelle zu danken.

#### 8. Zusammenfassung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit bildet letzten Endes die Berechnung der totalen Dämpfung, die eine elektromagnetische Welle beim Durchgang durch einen Hohlleiter von kreisförmigem Quer-



schnitt erfährt, wenn der innere, kreiszylindrische Hohlraum dieses Leiters in konzentrischer Schichtung zwei untereinander verschiedenartige, in sich selbst aber homogene dielektrische Stoffe mit bekanntem Verlustwinkel enthält. Die Lösung der Aufgabe erfordert bei diesem Ziel die Herstellung des Zusammenhanges zwischen der Wellenlänge der von außen aufgedrückten Schwingung und der Wellenlänge der Schwingung, die im Rohr zustande kommt, und außerdem die Herleitung der Formeln, mit deren Hilfe sowohl die Dämpfung infolge der Umelektrisierungsverluste in den Dielektrika als auch die Dämpfung infolge der Stromwärmeverluste in der Wandung des Hohlleiters berechnet werden kann.

Um den ersten Teil der Aufgabe zu lösen, werden im Abschnitt 2 unter Berücksichtigung der Randbedingungen an den verschiedenen Grenzflächen die für die beiden Teilräume im Innern des Hohlleiters verschiedenen Wellengleichungen unter der Annahme integriert, daß die entstehende Lösung eine längs der Hohlleiterachse fortschreitende elektromagnetische Welle darstellt. Neben den  $\epsilon$ -Werten werden dabei im allgemeinen Teil auch die  $\mu$ -Werte als verschieden angesehen. Die Integration gelingt im allgemeinsten Falle nur dann, wenn von vornherein die beiden Typen der  $TE_{n,p}$ - und der  $TM_{n,p}$ -Welle als koexistent betrachtet werden. Das Vorhandensein zweier verschiedener Dielektrika in einem Hohlleiter erzwingt also ganz von selbst eine Kopplung beider Wellentypen. Nur bei den axialsymmetrischen Wellen mit  $p=0$ , deren Feldkomponenten also nicht vom Azimutwinkel abhängen, können die beiden Wellentypen unabhängig voneinander bestehen. Das gesuchte Fortpflanzungsmaß  $\alpha$  der Hohlleiterwelle, das umgekehrt proportional mit der Rohrwellenlänge ist, erscheint als die Wurzel der transzendenten Gl. (2,9). Sie reduziert sich bei axialer Symmetrie auf das Verschwinden einer der beiden linksstehenden Faktoren. Die Richtigkeit dieser Gleichung wird geprüft an den Entartungsformen, in die sie für spezielle Werte der geometrischen oder physikalischen Daten übergeht.

Die sich daran anschließende Auflösung der transzendenten Gleichung wird in den Abschnitten 3 und 4 nur für den Fall der axialen Symmetrie der Welle mit  $p=0$ , aber für beide Wellentypen durchgeführt. Der Vorgang der Auflösung wird ausführlicher besprochen und an einer größeren Zahl von Abbildungen in seinen einzelnen Phasen erläutert. Wir heben darunter vor allem die Abb. 4 und 5 hervor, die für verschiedene Werte von  $(\epsilon_1/\epsilon)^{1/2}$  als Parameter die kritischen Frequenzen der  $TE_{10}$ - und  $TM_{10}$ -Welle in Abhängigkeit von  $a/b$  darstellen, und die Abb. 10 und 15, die für einen

speziellen Fall den Gang der Rohrwellenlänge mit der Wellenlänge der aufgedruckten Schwingung veranschaulichen. Für einige Grenzfälle wird auch noch am Schluß des Abschnitts 4 der Zusammenhang zwischen diesen beiden Wellenlängen in analytischer Form angegeben.

Der Abschnitt 5 bringt für die beiden axialsymmetrischen Wellentypen die Aufstellung der Beziehungen (5,3) und (5,6) für die Dämpfung der Wellen infolge der Umelektrisierungsverluste. Sie werden zunächst unter der Annahme hergeleitet, daß beide Dielektrika im Hohlleiter verlustbehaftet sind. Die Formeln für die einfacheren Fälle ergeben sich daraus von selbst. Sie werden schließlich auch noch auf eine Form gebracht, die an Hand der Abb. 10 und 15 eine wenn auch nur wenig genaue Berechnung der Dämpfung auf graphisch analytischer Grundlage erlaubte. Für einige Grenzfälle lassen sich explizite Näherungsformeln angeben mit einem allerdings nur beschränkten Geltungsbereich.

Im Abschnitt 6 werden in den Gl. (6,7) und (6,12) die entsprechenden Beziehungen für die Dämpfung der axialsymmetrischen *TE*- und *TM*-Wellen infolge der Stromwärmeverluste in den Wandungen hergeleitet. Das dabei benutzte Prinzip ist aus den Arbeiten über Hohlleiter mit homogenem Füllstoff hinlänglich bekannt. Die totale Dämpfung eines Hohlleiters mit dielektrischem Einsatz ergibt sich mit ausreichender Annäherung aus der bloßen Addition der nach dem obigen berechenbaren beiden einzelnen Dämpfungskomponenten.

Der Abschnitt 7 enthält die Anwendung der aufgestellten Formeln auf die Berechnung der totalen Dämpfung einer *TE*-Welle in einem Hohlleiter bestimmter Abmessung, wenn der dielektrische Einsatz einmal ein dielektrischer Mittelleiter ist, das andere Mal eine dielektrische Hülse. Die Rechnungen erstrecken sich auf die *TE*<sub>10</sub>- und *TE*<sub>30</sub>-Welle und gipfeln in den Abb. 16...19, die die beiden Dämpfungskomponenten sowie die totale Dämpfung in Abhängigkeit von der Frequenz darstellen.

#### Schriftumsverzeichnis

- 1) D. Hondros und P. Debye, Elektromagnetische Wellen an dielektrischen Drähten. Ann. d. Phys. [4] 82. S. 465—476. 1910.
- 2) D. Hondros, Über elektromagnetische Drahtwellen. Ann. d. Phys. [4] 30. S. 905, 950. 1909.

Wegen der zahlreichen Arbeiten über Hohlleiter mag hier nur auf die Literaturzusammenstellung verwiesen werden, die am Schluß der Arbeit des Verfassers in den Ann. d. Phys. [5] 39 S. 128. 1941 zu finden ist.

Berlin SW 29, Urbanstr. 126.

(Eingegangen 25. Juni 1943)

**Plasmaerscheinungen bei plötzlichen Stößen****Von W. O. Schumann**

(Mit 7 Abbildungen)

Zwischen der Kathode und der Anode einer Vakuumentladung breitet sich die positive Säule (Plasma) aus, die als Ganzes ungeladen ist, d. h. gleich viel Elektronen und positive Ionen je Kubikzentimeter enthält und welche von den Elektronen auf ihrem Weg zur Anode und von den positiven Ionen in entgegengesetzter Richtung

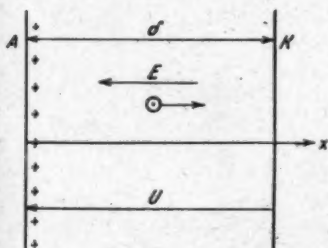


Abb. 1

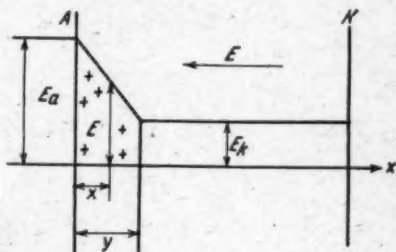


Abb. 2

durchströmt wird. Wird nun z. B. eine Anode sehr rasch negativ gegenüber der Kathode gemacht, oder wird einer Elektrode im Plasma sehr rasch eine negative Spannung aufgeprägt, so wirken nun auf die Elektronen und Ionen elektrische Kräfte in entgegengesetzter Richtung wie im normalen Zustand. Die Elektronen werden von der jetzt negativen Elektrode fortgetrieben und es bleibt eine positive Raumladung an dieser Elektrode übrig. Im folgenden sollen die Erscheinungen beschrieben werden, die auftreten, bevor die relativ zu den Elektronen trägen Ionen sich in Bewegung setzen, da erfahrungsgemäß in diesen kurzen Zeiten sich für die Entladung besonders wichtige Vorgänge abspielen. Die positiven Ionen werden also im folgenden als unbeweglich angesehen. Gegeben sei zunächst für das ebene Problem ein ausgedehntes Plasma zwischen zwei Ebenen im Abstand  $\delta$  zwischen denen plötzlich zeitlos eine Gegenspannung  $U$  angelegt wird (Abb. 1), die ein Feld  $E$  von der Bogenkathode  $K$  gegen die Bogenanode  $A$  zu gerichtet, erzeugt. Dieses Feld verschiebt die

Elektronen gegen die Feldrichtung auf die Kathode  $K$  zu, so daß vor der Anode eine positive Ionenschicht mit konstanter Dichte entsteht (Abb. 1 und 2). In dieser Schicht gilt

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{p}{A}, \quad \left( A = \frac{e}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^{11}} F/cm \right),$$

$$E_a - E_k = \frac{p}{A} y.$$

Die gesamte Gegenspannung  $U$  ist

$$U = \int_0^a E dx = E_k \delta + \frac{1}{2} \frac{p}{A} y^2,$$

woraus

$$E_k = \frac{U}{\delta} - \frac{p}{2A\delta} y^2 \quad \text{und} \quad E_a = \frac{U}{\delta} + \frac{p}{A} y \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{y}{\delta} \right)$$

folgt. Die Beschleunigungsgleichung für den verschobenen Elektronenblock heißt

$$(1) \quad m \frac{dv}{dt} = e E_k, \quad \text{bzw.} \quad m \frac{dy^2}{dt^2} = e \left[ \frac{U}{\delta} - \frac{p}{2A\delta} y^2 \right].$$

Hieraus folgt, wenn  $U$  zeitlich konstant ist

$$(2) \quad \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = v^2 = \frac{2e}{m} \frac{y}{\delta} \left( U - \frac{p y^2}{6A} \right) \quad \text{mit} \quad v = 0 \quad \text{für} \quad y = 0.$$

Es ist  $v = 0$  für  $y_m = \sqrt{\frac{6AU}{p}}$ , und  $v$  ist ein Maximum

für  $y_m = \sqrt{2 \frac{A}{p}} U$  und das Maximum beträgt

$$(3) \quad v_m^2 = \frac{4}{3} \frac{e}{m} \frac{U}{\delta} \cdot \sqrt{2 \frac{A}{p}} \cdot U.$$

Die maximale Konvektionsrückstromdichte ist

$$i_{km} = p v_m = (pU)^{1/2} \left( \frac{4}{3} \frac{e}{m\delta} \right)^{1/2} (2A)^{1/2}.$$

Setzt man  $p \approx 10^{-8}$  Coul/cm<sup>3</sup>, was etwa  $10^{11}$  Ionen und Elektronen je Kubikzentimeter entspricht, und  $U = 1000$  Volt, so wird  $y_{cm} \approx 4,5 \cdot 10^{-3} \sqrt{U} \text{ cm} \approx 0,13 \text{ cm}$  und  $y_m = \sqrt{3} y_{cm} \approx 0,22 \text{ cm}$ . Ist die Plasmalänge  $\delta \approx 10 \text{ cm}$ , so wird  $v_m \approx 1,7 \cdot 10^8 \text{ cm/sec}$ , und  $i_m = p v_m$ ,  $i_m \approx 1,7 \text{ A/cm}^2$ , bei einer Fläche von  $100 \text{ cm}^2$  also  $J_m \approx 170 \text{ A}$ . Wäre  $p$  100mal kleiner  $\approx 10^{-10} \text{ C/cm}^3$ , so würde  $y_m$  und  $y_{cm}$  10mal größer und  $i_m$  würde etwa 30mal kleiner, d. h.  $J_m \approx 5,7 \text{ A}$ . Die maximale Feldstärke an der Anode  $A$ ,  $E_{a, \max}$  tritt für  $y = y_m$  auf und beträgt  $\frac{U}{\delta} + \sqrt{\frac{6pU}{A}}$ , in unserem Beispiel =  $22 \text{ kV/cm}$  bei  $p = 10^{-8} \text{ C/cm}^3$ , und  $2,2 \text{ kV/cm}$  bei  $p = 10^{-10} \text{ C/cm}^3$ . Die Gegen-

feldstärke an der Kathode  $E_k$  ist Null bei  $v=v_m$ ,  $y=y_m$  und wird negativ bei  $y=y_m$ , nämlich  $-2 \frac{U}{\delta}$ .

Die weitere Integration der Gl. (2) ergibt:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{2e}{m} \frac{y}{\delta} \left( U - \frac{p y^2}{6A} \right)}} = t,$$

und mit der Substitution  $\frac{p}{6UA} y^2 = z^2$  wird

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{6UA} \right)^{1/4} \cdot \left( \frac{e}{m} \frac{2U}{\delta} \right)^{1/4} \cdot t = at = \frac{1}{\sqrt{2}} K(k) - \frac{1}{\sqrt{2}} F(k, \varphi),$$

wo  $F$  das elliptische Integral 1. Gattung und  $K$  das vollständige

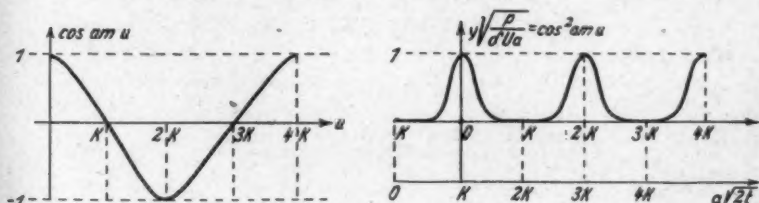


Abb. 3

elliptische Integral 1. Gattung bedeutet, mit dem Modul  $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1,854$  und mit  $\cos \varphi = z$ . Da also  $F(k, \varphi) = K(k) - a \sqrt{2} \cdot t = u$ , ergibt die Umkehrung die elliptische Funktion  $\varphi = am u$  und

$$z = \cos \varphi = \cos am u = \cos am (a \sqrt{2} \cdot t - 1,85)$$

und schließlich

$$y = \sqrt{\frac{6UA}{p}} \cos^2 am (a \sqrt{2} \cdot t - 1,85).$$

Die elliptische Funktion  $\cos am u$  weicht für  $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$  noch nicht allzustark in der Form von der Funktion  $\cos u$  ab. Sie hat die Periode  $4K = 7,416$  (gegen  $2\pi = 6,28$  bei der trigonometrischen Funktion). Sie ist schematisch dargestellt in Abb. 3.

Die Funktion  $\cos^2 am u$  hat die Periode  $2K = 3,708$  und daher hat  $y$  die Periodendauer

$$T = \frac{3,708}{a \sqrt{2}} = \frac{3,71 \cdot \sqrt{2}}{\left( \frac{p}{6UA} \right)^{1/4} \left( \frac{e}{m} \frac{2U}{\delta} \right)^{1/4}},$$

welche mit wachsender angelegter Spannung  $U$  abnimmt. In dem obigen Beispiel ergibt sich  $T$  zu  $\approx 4,5 \cdot 10^{-8}$  Sek., was einer Frequenz von etwa  $2 \cdot 10^8$  Hertz entspricht.

Aus  $y$  ergibt sich die Geschwindigkeit mit

$$u' = a\sqrt{2} \cdot t - K \text{ zu } v = \frac{dy}{dt} = -2\sqrt{\frac{6U\Delta}{p}} \cdot a\sqrt{2} \cos am u' \cdot \sin am u' \cdot dn am u',$$

deren Verlauf in Abb. 4 skizziert ist:

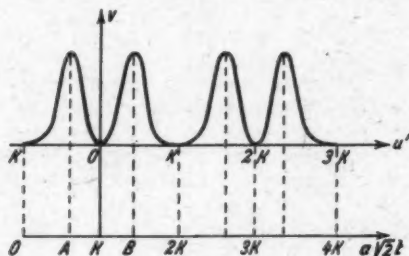


Abb. 4

Bestimmt man das Maximum von  $v$  mit  $\frac{dv}{dt} = 0$ , so ergibt sich  $\cos^2 am u' = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\sin^2 am u' = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $dn^2 am u' = k^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

d. h.

$$c^2 \cdot s^2 \cdot d^2 = \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

woraus

$$u' = \pm 0,41 K + n \cdot 2K$$

folgt, also

$$a\sqrt{2}t = \pm 0,41 K + K(1 \pm 2n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Für  $n = 0$ , also  $a\sqrt{2}t = 1,41 K$  und  $0,59 K$ . (Punkte A und B, Abb. 4). Rechnet man  $v_m$  mit diesen Werten aus, so ergibt sich derselbe Wert wie Gl. (3), S. 370  $v_m = \sqrt{\frac{32}{9} \frac{U^2 \Delta}{p} \left(\frac{e}{m\delta}\right)^2}$ . Die Zeit von  $t = 0$  bis zum Erreichen des ersten Maximums bei A ist  $\frac{0,59 K}{2K} \approx 30\%$  der Periodendauer (statt 25% bei einer Sinusoschwingung), dafür erfolgt das Abstoppen des Blocks in  $\frac{0,41}{2} \approx 20\%$  der Periode. Beim Rücklauf ist es umgekehrt.

Die beschriebenen Erscheinungen treten genau nur dann ein, wenn die „Rückspannung“ äußerst rasch angelegt wird (in etwa  $10^{-8}$  Sek. in



dem beschriebenen Beispiel). Bei allmählicherer Spannungssteigerung werden die Rückströme kleiner. Da die Fallzeit des Hg-Ions bei einer Strecke von 2 mm und bei 1000 Volt Spannung etwa  $10^{-7}$  Sek. beträgt, kann man bei solchen Spannungen, die in etwa  $10^{-7}$  Sek. ihren Höchstwert erreichen, die Ionen in erster Näherung noch unbeweglich annehmen. Nimmt man an, daß die Schwingungen während des Spannungsanstiegs so rasch abklingen, daß jeweils der stationäre

Wert  $y = \sqrt{2 \frac{d}{p} U}$  herrscht, so ist  $v = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2d}{p}} \frac{1}{\sqrt{U}} \frac{dU}{dt}$ .

Steigt  $U$  nach dem Gesetz  $U = \frac{E}{\tau} \cdot t$  in der Zeit  $\tau$  auf den Wert  $E$ ,

so wird  $v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2d}{p}} \frac{E}{\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$ , was für  $E = 1000$  v,  $\tau \approx 10^{-7}$  Sek.,

$p = 10^{-8}$  C/cm<sup>2</sup>,  $v = 220/\sqrt{t}$ , für  $t = 10^{-8}$  Sek.,  $v \approx 2,2 \cdot 10^6$  cm/sec, etwa  $1/100$  des Wertes von  $v_m$  nach Gl. (2) ergibt. Für größere  $\tau$  und  $t$  ergeben sich noch kleinere Werte. Die Spannung  $U$  liegt jeweils an der Ionenschicht mit der Dicke  $y$ , die für  $t = \tau$  den Wert 0,14 cm erreicht. Die Gegenfeldstärke an der Anode erreicht den Wert

$E_a = \sqrt{E \frac{2p}{d}} \approx 13,5$  kV/cm. Steigt die Spannung so langsam, daß mit stationärer Ioneneinströmung in die Anode gerechnet werden kann ( $i = 4,10^{-9} \frac{U^{1/2}}{y^2}$  für Hg-Ionen),  $y = \frac{6,3 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{i}} U^{1/2}$ , so ergeben sich noch wesentlich geringere Rückströme. Mit einer Ionenstromdichte von 5 mA/cm<sup>2</sup> und bei 1000 Volt wird  $y = 0,15$  cm.

Während also mit immer langsamerem Spannungsanstieg die Rückströme immer kleiner werden, bleibt in allen Fällen die Tatsache bestehen, daß die angelegte Spannung in relativ dünnen Schichten an der Anode liegt und daß die dadurch beschleunigten Ionen die Anodenoberfläche mit großer Energie treffen und dort Elektronen auslösen können. Nur wenn die Spannung so langsam ansteigt, daß der größte Teil der Ionen mit kleiner Geschwindigkeit abgeführt werden kann, fällt die Gefahr fort<sup>1)</sup>.

Während also die Größe der Rückströme mit abnehmender Geschwindigkeit des Spannungsanstiegs immer kleiner wird, können trotzdem bei starker Konzentration dieser Ströme, z. B. auf den Brennfleck eines Hg-Bogens zu, dort starke Raumladungen entstehen, wie im folgenden Abschnitt gezeigt ist.

1) Über experimentelle Vorgänge bei raschem Anlegen hoher negativer Spannungen an ein Gitter vgl. O. Engelbrecht, A. f. E., 36. 1942. S. 515.

## Einwirkung des Rückstromes auf den Brennfleck

Der Brennfleck eines Hg-Vakuumbogens kann in erster Näherung als punktförmiger Ausgangspunkt des Bogens angesehen werden.

In seiner Umgebung findet radiale Einströmung der Teilchen statt. Die Vorgänge werden deshalb am besten durch ein sphärisches Koordinatensystem beschrieben (Abb. 5).

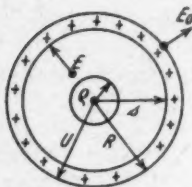


Abb. 5

Da  $\text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (Er^2)}{\partial r}$  gilt, folgt innerhalb der Raumladungsschicht ( $s, R$ )

$$E = \frac{1}{r^2} \left[ E_0 R^2 - \frac{\rho}{\epsilon} \left( \frac{R^2}{3} - \frac{r^2}{3} \right) \right]$$

und speziell an der Grenze  $s$  der sich kontrahierenden Elektronenkugel,

$$E_s = \frac{E_0 R^2}{s^2} - \frac{\rho}{\epsilon s^2} \left( \frac{R^2}{3} - \frac{s^2}{3} \right) = \frac{m}{e} \frac{dv}{dt} = - \frac{m}{e} \frac{ds^2}{dt^2}.$$

Ist in dem Raum innerhalb des Radius  $s$  keine Raumladung da (was aber nur für sehr kleine Verschiebungen  $R - s$  angenähert gilt), so gilt

$$U = \int_e^s E_s \frac{s^2}{r^2} dr + \int_s^R E dr,$$

und daraus

$$E_0 = \frac{U + \frac{\rho}{3\epsilon} (R^3 - s^3) - \frac{\rho}{2\epsilon} (R^2 - s^2)}{R^2 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{R} \right)}$$

und

$$E_s = \frac{U - \frac{\rho}{6\epsilon} R^2 + \frac{\rho}{2\epsilon} s^2 \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{s}{R} \right)}{\left( \frac{1}{s} - \frac{1}{R} \right) \cdot s^2}.$$

Aus der Gl.  $\int_s^R E_s ds = \frac{m}{e} \frac{v^2}{2}$  ergibt sich die Geschwindigkeit  $v$  am Außenrand  $s$  der Elektronenkugel zu

$$v^2 = \frac{2e}{m} \frac{R-s}{Rs} \left[ U - \frac{\rho}{6\epsilon} (R-s)^2 \right].$$

Der Maximalwert der Geschwindigkeit, der für  $E_s = 0$  auftritt,  $\frac{dv}{dt} = 0$ , ergibt als Bedingung für  $s$

$$U = \frac{\rho}{6\epsilon} (R-s)^2 \cdot \left( 1 + 2 \frac{s}{R} \right).$$

Für kleine Verschiebungen,  $s \approx R$ , folgt

$$(R - s)_{\text{em}} \approx \sqrt{\frac{2AU}{p}} \quad (\text{wie im ebenen Fall}),$$

$$v_m \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2A}{p}} \cdot U^{1/4}.$$

und der gesamte von den Elektronen transportierte maximale Strom

$$J_m \approx 4\pi R^2 p v_m = \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{e}{m}} R (pU)^{1/4} \sqrt{2A},$$

z. B. für  $p = 10^{11}$  Ionen/cm<sup>3</sup>,  $R = 10$  cm,  $U = 80$  V,  $J \approx 108$  A und für eine Halbkugel die Hälfte. Kurze Zeit nachher wird die Strömung der Kugel gestoppt, es wird  $v = 0$  für

$$(R - s)_{v=0} = \sqrt{\frac{6AU}{p}} \quad (\text{wie im ebenen Fall}).$$

Mehr nach dem Mittelpunkt der Kugel zu, für  $r < s$ , wächst  $E = \frac{E_0 s^2}{r^2}$  immer mehr an, und demgemäß auch die Beschleunigung und die Geschwindigkeit. Durch das Strömen der Elektronen gegen den Kugelmittelpunkt zu ist dort die Bildung einer Raumladung zu erwarten. Da aber zugleich die Geschwindigkeit nach innen zu stark anwächst, kann dadurch die Raumladungswirkung zum Teil oder ganz kompensiert werden.

Zur Abschätzung der Raumladung sei der einfachste Fall angenommen, nämlich, daß sich die Feldstärke während der Wanderung der Teilchen nicht mit der Zeit ändert, was an sich zunächst einer sehr dünnen Ionenschicht im Anfang der Bewegung entspricht. Es ergibt dieser Fall die größten Geschwindigkeiten der Teilchen, so daß der Fall, wo  $E_s$  mit wachsender Zeit abnimmt, noch größere Raumladungen ergibt. Die Gesamtheit aller Teilchen soll also ab  $t = 0$  in einem zeitlich konstanten Feld gegen den Kugelmittelpunkt zu fallen. Der Feldstärkenverlauf sei durch  $E = E_0 \frac{r_0^2}{r^2}$  gegeben, wobei  $E_0$  die gegebene zeitlich konstante Feldstärke am Radius  $r_0$  bedeutet. Dann gilt, wenn die Teilchen nach innen zu fallen,

$$m \frac{dv}{dt} = E_0 \frac{r_0^2}{r^2} \cdot e = -m \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Damit wird

$$(4) \quad v = \sqrt{2 \frac{e}{m} E_0 r_0^2 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)} = \frac{\dot{K}}{\sqrt{R}} \cdot \frac{1}{r} \sqrt{1 - z^2}$$

mit  $K^2 = 2 \frac{e}{m} E_0 r_0^2$  und  $z^2 = \frac{r}{R}$  und

$$(5) \quad \begin{cases} t = \frac{R^{3/2}}{K} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin z + z \sqrt{1-z^2} \right) \\ \quad = \frac{1}{K} \frac{r^{3/2}}{z^3} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin z + z \sqrt{1-z^2} \right), \end{cases}$$

wenn das Teilchen bei  $r = R$ ,  $z = 1$ , mit  $v = 0$  seinen Fall nach dem Mittelpunkt beginnt. Mit abnehmendem  $r$  wächst  $v$  an, und im Kugelmittelpunkt, wo die Kathode sitzt, trifft es mit sehr großer Geschwindigkeit ein. Die Zeit, die ein Teilchen braucht, um von seinem Ausgangspunkt  $R$  bis zum Kugelmittelpunkt zu kommen,  $z = 1$ , ist  $t_L = \frac{\pi}{2} \frac{R^{3/2}}{K}$ . Um abzuschätzen, ob und wo Raumladungen

auftreten, rechnet man  $\frac{\partial n}{\partial t} = \operatorname{div} n v = \frac{n}{r^2} \frac{d(r^2 \cdot v)}{dr}$  aus, mit der Annahme, daß  $n$  zunächst räumlich und zeitlich konstant ist für die nach innen gerichtete Strömung und gleich der ruhenden positiven Ladungsdichte. Natürlich gilt das nur zunächst für kleine Verschiebungen, die aber hauptsächlich interessieren. Bestimmt man aus (5)  $dz/dr_{t=\text{const}}$  und beachtet, daß bei  $dv/dr$  sowohl  $r$  als auch  $z$  bei  $t = \text{const}$  als variabel anzusehen sind, so entsteht

$$(6) \quad \operatorname{div} n v = n \frac{3}{2} \frac{K}{r^{3/2}} \cdot \frac{\left( \frac{\pi}{2} - \arcsin z + z \sqrt{1-z^2} \right) (3-4z^2) + 2z^2 \sqrt{1-z^2}}{3 \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin z + z \sqrt{1-z^2} \right) \cdot \sqrt{1-z^2} + 2z^2}.$$

Die Raumladungsänderung  $\frac{\partial n}{\partial t}$  ist bei Beginn der Bewegung,  $z = 1$ , gleich Null und wächst mit abnehmendem  $z$  an, und um so stärker je näher die betreffende Stelle dem Kugelmittelpunkt liegt. Der Einfluß der Ladungskonzentration überwiegt den Einfluß der Geschwindigkeitssteigerung während der Bewegung. Die Zeit, bei welcher Gl. (6) gilt, kann aus Gl. (5) entnommen werden und aus dieser Gleichung ebenfalls, aus welcher Entfernung  $R$  die betreffenden beobachteten Elektronen stammen. Um speziell die Wirkungen bei kleinen Verschiebungen zu übersehen, setzt man  $z = 1 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ,  $R - r = 2\varepsilon \cdot R$ , und erhält

$$\begin{aligned} \arcsin z &= \arcsin(1 - \varepsilon) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2\varepsilon} \left( 1 + \frac{9}{12}\varepsilon + \frac{7}{288}\varepsilon^2 + \frac{33}{3456}\varepsilon^3 \dots \right), \\ \sqrt{1-z^2} &= \sqrt{2\varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{4}\varepsilon - \frac{1}{32}\varepsilon^2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - \arcsin z + z \sqrt{1-z^2} &= t \cdot \frac{K}{R^{3/2}} = 2\sqrt{2\varepsilon} \left( 1 - \frac{7}{12}\varepsilon + \frac{35}{288}\varepsilon^2 \dots \right), \\ v &= \frac{K}{\sqrt{R}} \sqrt{2\varepsilon} \left( 1 + \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{23}{32}\varepsilon^2 \dots \right) \end{aligned}$$

und schließlich

$$(7) \operatorname{div} n v = \frac{n K}{r^{3/2}} \cdot 8 \varepsilon \sqrt{2 \varepsilon} \left( 1 - \frac{4551}{1152} \varepsilon \right) = \frac{n K}{r^{3/2}} \cdot 8 \varepsilon \sqrt{2 \varepsilon} (1 - 3,96 \varepsilon).$$

Für kleine Verschiebungen  $\varepsilon$  wächst die Raumladung mit  $\varepsilon \sqrt{\varepsilon}$  langsam an, vgl. Abb. 6.

Die Raumladung kann für kleine Radien  $\rho$  der Innenelektrode recht erheblich werden. Da  $E_0 r_0^2 \approx U \rho$  für 2 Kugeln von sehr verschiedenen Durchmessern ist, wo  $U$  die angelegte Spannung bedeutet, ist  $K \approx 6 \cdot 10^7 \sqrt{U \rho}$ , und der Faktor  $\frac{n K}{r^{3/2}}$  wird für etwa

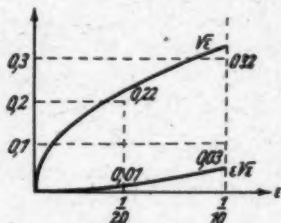


Abb. 6

$10^{11}$  Ionen/cm<sup>3</sup> und  $r = \rho$  gleich etwa  $0,6 \frac{\sqrt{U}}{\rho}$ , wo für  $\rho$  etwa der Radius des Kathodenflecks einzusetzen ist.

Durch Umkehrung der Reihen folgt

$$\varepsilon = t'^2 + \frac{7}{6} t'^4 + \frac{77}{36} t'^6, \quad \text{mit } t' = \frac{t K}{2 \sqrt{2} R^{1/2}}$$

und

$$v = \frac{K}{\sqrt{R}} \sqrt{2} t' \left[ 1 + \frac{4}{3} t'^2 + \frac{211}{72} t'^4 \dots \right].$$

Man erkennt also, daß sich bei einem solchen „Rückstrom“ in erster Linie in der Nähe des Mittelpunktes der Kugel, d. h. nahe am Kathodenfleck eine negative Raumladung durch die zuströmenden Elektronen ausbilden wird, die eine dort eventuell vorhandene positive Raumladung überschwemmt und in ihrer Wirkung aufhebt. Da für diese Strömung die Kathode in der Kugelmittle „Anode“ ist, wird sich dort durch die Raumladung ein starkes anodisches Feld entwickeln, das alle Elektronen in die Kathode hineinzieht, bzw. deren Austritt verhindert.

Nach kurzer Zeit wird durch den sich ausbildenden Schwingungsvorgang (vgl. vorne) bei der Entwicklung der positiven Ionenschicht an der Außenelektrode (Anode Gitter) dieses Feld verschwinden und die Elektronenströmung ihre Richtung umkehren. Dann dürfte aber in vielen Fällen der natürliche Kathodenfleck schon erloschen sein, wenn er dann nicht eventuell bei der Wiederholung erlischt.

Eine solche Raumladungsentwicklung ist immer zu erwarten, denn  $\operatorname{div} n v = \frac{n}{r^2} \frac{d(r^2 v)}{dr}$ , wenn man zunächst konstante Dichte  $n$  annimmt, ist nur dann Null, wenn  $r^2 v = \text{const}$  ist,  $v = \frac{\text{const}}{r^2}$ . Nimmt

man jetzt auch für  $E$  den Verlauf  $\text{const}/r^2$  an, so heißt das  $v = bE$ , wo  $b$  eine konstante Beweglichkeit bedeutet. Nur in diesem Fall, der z. B. einem durchströmten Leiter entspricht, ist dann keine Raumladung vorhanden. Aber gerade dieses Bewegungsgesetz der Elektronen ist bei plötzlichem Anlegen einer Gegenspannung im Plasma bestimmt nicht zu erwarten, da immer eine Anlaufzeit verstreicht, bis der Beweglichkeitsansatz gelten kann. Allgemein müßte gelten  $nv = \frac{\text{const}}{r^2}$ , was stationär zwangsläufig erfüllt sein muß. Der Übergang vom rückstromlosen Zustand zum stationären wird deshalb praktisch immer dort von Raumladungsbildung begleitet sein, wo sich die Entladung stark konzentriert.

Fließt der Elektronenstrom umgekehrt radial nach außen (plötzliche starke Erhöhung der positiven Anodenspannung), so bildet sich am Brennfleck nunmehr eine starke positive Raumladung aus, die den Fleck befähigt, in kürzester Zeit sehr große Ströme abzugeben, wodurch die Erhöhung der positiven Anodenspannung praktisch zeitlos wieder zusammenbricht. Diese Raumladungsbildungen sind mit ein Grund dafür, daß dort, wo der Bogen stark kontrahiert wird, z. B. bei sehr rascher Potentialänderung des Gitters, sich oberhalb (anodenseitig) des Gitters eine positive und unterhalb eine negative Raumladungsschicht bildet, durch deren Einfluß auf das Feld die Brennspannung erhöht wird, während dagegen z. B. bei plötzlichem starkem Stromrückgang diese Schichten umgekehrtes Vorzeichen bekommen.

#### Periodische Schwingungen

Der Fall periodischer Schwingungen, der z. B. entsteht, wenn an eine Elektrode im Plasma eine negative Vorspannung gelegt wird, über die eine kleine Wechselfspannung gelagert wird, sei nur kurz angedeutet, da er schon<sup>1)</sup> für das zylindrische Problem behandelt ist. Indem in Gl. (1)

$U = U_g + u_w$  mit  $u_w \ll U_g$  und  $y = Y_g + y_w$ , mit  $y_w \ll Y_g$  gesetzt wird, folgt mit Berücksichtigung einer Reibungskraft

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + r \frac{dy}{dt} + \frac{ep}{2A\delta} y^3 = U \frac{e}{\delta}$$

und

$$Y_g = \sqrt{2 \frac{A}{p} U_g} \quad (\text{wie } y_w \text{ auf S. 370})$$

und

$$m \frac{d^2 y_w}{dt^2} + r \frac{dy_w}{dt} + \frac{ep}{A\delta} Y_g y_w = \frac{e u_w}{\delta},$$

1) W. O. Schumann, A. f. E. 35. S. 441. 1941.



die Gleichung einer gedämpften Schwingung mit der Eigenfrequenz  $\lambda = -\frac{r}{2m} \pm j\sqrt{\frac{ep}{m\delta} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$ , wo in erster Näherung  $\frac{e}{r} = b$ ,  $r = \frac{e}{b}$  gesetzt werden kann, mit  $b$  als Beweglichkeit in  $\text{cm}^2/\text{Volt sec}$ , wobei  $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 \ll \frac{ep}{m\delta}$  ist. Rechnet man komplex, so folgt

$$Y_w = \frac{e U_w}{\delta} \frac{1}{j\omega r + \frac{ep}{\delta} \frac{Y_g}{\delta} - \omega^2 m},$$

wobei Resonanz mit  $Y_{w\max} = \frac{e U_w}{j\delta \omega_R r}$  für  $\omega_R \approx \sqrt{\frac{ep}{\delta m} \cdot \frac{Y_g}{\delta}}$  entsteht.

Da  $\frac{Y_g}{\delta} \ll 1$ , ist auch  $\omega_R \ll \lambda$ . Während der Frequenz  $\lambda$  die Wellenlängen von 30–50 cm in normalen Plasmen entsprechen, entspricht  $\omega_R$  mit  $\frac{Y_g}{\delta} \approx \frac{1}{100}$ , einer Wellenlänge von 3–5 m, die also eine zweite bevorzugte Frequenz des Vakuumbogens ist.

Der von der Elektrode ausgehende Strom ist

$$i = A \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{A}{\delta} \frac{\partial U}{\partial t} + p v \left(1 - \frac{y}{\delta}\right), \quad v = \frac{dy}{dt}$$

bzw.

$$J = j\omega U_w \left[ \frac{A}{\delta} + \frac{\frac{pe}{\delta} \left(1 - \frac{Y_g}{\delta}\right)}{j\omega r + \frac{ep}{\delta} \frac{Y_g}{\delta} - \omega^2 m} \right],$$

was wieder in einfachster Weise gedeutet werden kann, als Reibenschaltung der Ionenschichtkapazität  $C = \frac{A}{Y_g}$  mit einer Parallelschaltung der Plasmainduktivität  $L = \frac{m}{ep}(\delta - Y_g)$  mit der geometrischen Plasmakapazität  $K = \frac{A}{\delta - Y_g}$ ,

wobei mit der Plasmainduktivität  $L$

ein Widerstand  $R = \frac{\delta - Y_g}{pe} \cdot r = \frac{\delta - Y_g}{pb}$  in Reihe geschaltet ist, vgl. Abb. 7. Es ist  $R \approx (\delta - Y_g)$  Ohm, wenn  $p = 10^{-8} \text{ C/cm}^2$  und  $b = 10^8 \text{ cm}^2/\text{Volt sec}$  gesetzt wird.

Es gibt also 2 Resonanzen. Erstens eine Parallelresonanz, bei der der aufgenommene Strom ein Minimum wird, bei der Frequenz

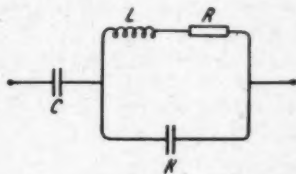


Abb. 7

1) Weil meist  $\left(\frac{r}{2m}\right)^2 \ll \frac{ep}{m\delta} \cdot \frac{Y_g}{\delta}$ .

$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{L K}} = \sqrt{\frac{ep}{m \Delta}} \approx \lambda$ , die der Eigenfrequenz des Plasmas entspricht und eine Serienresonanz, bei der der Strom ein Maximum wird,

$$\omega_s = \frac{1}{\sqrt{L(K+C)}} = \sqrt{\frac{ep}{m \Delta} \frac{Y_s}{\delta}} \approx \omega_R = \sqrt{\frac{e}{m \delta}} \sqrt{2 \frac{p}{\Delta} U}.$$

Das reine Plasma hätte danach einen Schwingungswiderstand

$$\sqrt{\frac{L}{K}} = (\delta - Y_s) \sqrt{\frac{1}{\frac{e}{m} p \Delta}}, \text{ für } p \approx 10^{-8} \text{ C/cm}^2 \text{ von etwa } 750(\delta - Y_s) \text{ Ohm.}$$

Die „Güte“ ist  $\frac{\sqrt{L/K}}{R} = 6 \sqrt{\frac{mp}{e \Delta}}$ , mit  $b \approx 10^8 \text{ cm}^2/\text{Volt sec}$  und  $p \approx 10^{-8} \text{ C/cm}^2$ , von  $\approx 750$  und einem Resonanzwiderstand

$$\frac{L}{KR} = \frac{m}{e \Delta} b (\delta - Y_s),$$

der unabhängig von der Dichte  $p$  ist, mit  $b \approx 10^8 \text{ cm}^2/\text{Volt sec}$  von  $\approx 5,5 \cdot 10^8 (\delta - Y_s) \text{ Ohm}$ , alles je Quadratzentimeter gerechnet. Damit verglichen ist der Blindwiderstand des vorgeschalteten Kondensators  $C$ , nämlich  $\frac{1}{\omega_p C}$  vollkommen zu vernachlässigen. Wegen der Unsicherheit von  $r$  können Güte und Resonanzwiderstand auch abweichende Werte haben.

Bei der Serienresonanz ist der Gesamtwiderstand des Kreises  $\approx R$ , der Schwingwiderstand  $\sqrt{\frac{L}{C}} = \delta \sqrt{\frac{1}{p \frac{e}{m} \Delta} \cdot \frac{Y_s}{\delta}}$  und die Güte

$$\frac{\sqrt{L/C}}{R} = b \sqrt{\frac{p}{m \Delta} \cdot \frac{Y_s}{\delta}}.$$

Beide sind also wesentlich kleiner als bei Plasmaresonanz oben, d. h. die Resonanzkurve verläuft viel flacher. Der Strom durch  $K$  ist zu vernachlässigen gegen jenen durch  $L$ . Bei sehr hohen Frequenzen,  $\omega > \lambda$ , nimmt der Verlustwinkel (die Dämpfung) mit wachsender Frequenz ab.

#### Überspannungen beim plötzlichen Abschalten

Da die Elektronenträgheit in der Entladung wie eine Selbstinduktion wirkt, sind beim plötzlichen Abschalten Überspannungen wie in einer Spule zu erwarten, die kurz abgeschätzt werden sollen. Der Vorgang verläuft in 2 Phasen. In der ersten müssen die in der normalen

Entladung mit der Translationsgeschwindigkeit  $v$ , laufenden Elektronen zum Stillstand gebracht werden. Sie prallen auf die Anode und laden diese negativ auf. Es gilt dann für den Rückstrom  $i = 0 = A \frac{\partial E_a}{\partial t} + n v$ , wo  $E_a$  das Gegenfeld und  $v$  die Elektronengeschwindigkeit von der Anode gegen die Kathode bedeutet.

$$m \frac{dv}{dt} = e E_a, \quad m \frac{d^2 v}{dt^2} = - \frac{en}{A} v,$$

$$v = A \sin \lambda t + \beta \cos \lambda t.$$

Für  $t = 0$  ist  $E_a = -E_0$  und  $v = -v_0$ , wenn  $E_0$  und  $v_0$  die Werte für die stationäre Entladung bedeuten, woraus

$$v = - \frac{e}{m \lambda} E_0 \sin \lambda t - v_0 \cos \lambda t$$

folgt. Das erste Glied ist meist als klein gegen das zweite zu vernachlässigen. Nach einer Viertelperiode  $\lambda t = \frac{\pi}{2}$  ist  $v$  zu Null geworden. Die Anodenfeldstärke  $E_a$  ist dann

$$E_a = \frac{n v_0}{A \lambda} \sin \lambda t, \quad E_{a \max} = \frac{n v_0}{A \lambda}$$

und die Gegenspannung  $U = E_a \cdot \delta$ . Die kinetische Energie des Elektronenblocks setzt sich in elektrostatische Feldenergie um. Mit  $n = p = 10^{-8} \text{ C/cm}^3$  und  $v_0 = 10^7 \text{ cm/sec}$ , ergibt sich  $U_{\max} \approx 70 \text{ Volt}$ .

In der folgenden Phase beginnen die Elektronen unter dem Einfluß der Gegenspannung von der Anode zur Kathode zu strömen, es bildet sich eine positive Ionenschicht vor der Anode (vgl. Abb. 1). In den ersten Momenten, so lange die positiven Ionen noch nicht in die Anode einströmen, ist nunmehr an der Anode  $E_a$  konstant, wenn  $i = 0$  ist. Allgemein gilt für einen der Anode von außen aufgedrückten Strom  $i = A \frac{\partial E_a}{\partial t}$ ,  $E_a - E_{a0} = \frac{i}{A} t$

$$E_a = E_{a0} - \frac{p}{A} y = \frac{m}{e} \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{i}{A} t + E_{a0} - \frac{p}{A} y,$$

woraus

$$y = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t + \frac{i}{p} t + E_{a0} \frac{A}{p}.$$

Für  $t = 0$  sei  $y = 0$  und  $v = \frac{dy}{dt} = 0$ , woraus

$$y = - \frac{i}{p \lambda} \sin \lambda t - E_{a0} \frac{A}{p} \cos \lambda t + \frac{i}{p} t + E_{a0} \frac{A}{p}.$$

$y$  wächst mit Schwankungen proportional mit der Zeit

$$v = \frac{dy}{dt} = - \frac{i}{p} \cos \lambda t + E_{a0} \frac{A}{p} \lambda \sin \lambda t + \frac{i}{p} + E_{a0} \frac{A}{p}.$$

Die Gegenspannung  $U$  ist

$$U = E_a \delta - \frac{p}{A} y \left( \delta - \frac{1}{2} y \right) = \frac{i d}{A y} \sin \lambda t + E_a \delta \cos \lambda t + \frac{p}{2A} y^2.$$

Ist speziell  $i = 0$ , so wird

$$y = E_a \frac{A}{p} (1 - \cos \lambda t), \quad v = E_a \frac{A}{p} \lambda \sin \lambda t,$$

$$i_k = p v = E_a A \lambda \sin \lambda t, \quad U = E_a \left( \delta \cos \lambda t + 2 \frac{A}{p} E_a \sin^2 \frac{\lambda t}{2} \right).$$

Mit  $E_a = \frac{p v_s}{A \lambda}$  wird  $y = \frac{v_s}{\lambda} (1 - \cos \lambda t)$ ,  $v = v_s \sin \lambda t$ ,

$$i_k = p v = p v_s \sin \lambda t, \quad U = \frac{p v_s}{A \lambda} \left( \delta \cos \lambda t + 2 \frac{v_s}{\lambda} \sin^2 \frac{\lambda t}{2} \right).$$

Es tritt also ein Rückwärtskonvektionsstrom von der Stärke des unterbrochenen auf und eine zwischen  $\pm E_a \delta$  schwankende Spannung. Nach kurzer Zeit sind diese Schwingungen durch Dämpfung und Ioneneinstrom in die Anode verschwunden.

München, den 14. Juli 1943.

(Eingegangen am 17. Juli 1943)

## Über das Eindringen des totalreflektierten Lichtes in das dünnere Medium

Von F. Goos und H. Hänchen

(Mit 2 Abbildungen)

Inhalt: Ein rechtwinkliges Prisma mit planer Hypotenusenfläche berührt die schwach kugelförmig konvex gekrümmte Hypotenusenfläche eines zweiten rechtwinkligen Prismas. An der dazwischenliegenden Luftlamelle werden Newtonsche Ringe erzeugt, deren Intensitätsverteilung photographisch-photometrisch vermessen wird. Aus diesen Messungen wird die Dicke der Luftlamelle für alle Ringzonen ermittelt. Wird jetzt mit dieser Prismenanordnung Totalreflexion an der ebenen Hypotenusenfläche erzeugt, so verschwinden die Newtonschen Ringe, und nur ein Zentralfleck bleibt übrig, der bedeutend größer als die kleine Berührungsfläche der beiden Prismen ist. Die Intensitätsverteilung in diesem Zentralfleck wird auch photographisch-photometrisch vermessen und als Funktion der Dicke der Luftlamelle dargestellt. Der Zentralfleck wird als Interferenzphänomen gedeutet und mathematisch durch Interferenzformeln dargestellt, die aus denen der „Newtonschen Ringerscheinung“ hergeleitet werden.

### § 1. Einleitung

Über das Eindringen totalreflektierten Lichtes in das dünnere Medium existieren eine große Reihe experimenteller und theoretischer Untersuchungen. Alle diese, und zwar ohne jede Ausnahme, weisen die Lichtbewegung im dünneren Medium nach und stören dadurch die Totalreflexion<sup>1)</sup>. Eine vollständige experimentelle Verfolgung des ganzen Phänomens liegt aber noch nicht vor.

G. Quincke<sup>2)</sup> benutzte zwei rechtwinklige Prismen, davon eines mit schwach konvexer Hypotenusenfläche und beobachtete an der zwischenliegenden dünnen Luftlamelle den Übergang von partieller Reflexion mit den Newtonschen Ringen zu totaler Reflexion mit dem Fleckphänomen. Quincke fand kurz nach Überschreiten der Grenze der Totalreflexion eine bedeutende Vergrößerung des Zentralflecks, der erst bei weiterem Vordringen in das Gebiet der Totalreflexion kleiner und kleiner wird. Dieselbe Fleckvergrößerung

1) In einer späteren Arbeit soll gezeigt werden, wie ein anderes Kriterium für das Eindringen in das dünnere Medium gefunden werden kann, dem dieser prinzipielle Mangel nicht anhaftet.

2) G. Quincke, Pogg. Ann. 127. S. 1. 1866.

kurz nach Überschreiten der Grenze der Totalreflexion beobachtete auch Hall<sup>1)</sup>.

Die von Voigt<sup>2)</sup> auf Grund der elektromagnetischen Lichttheorie gegebene Erklärung des Phänomens sagt aber aus, daß der Zentralfleck seine maximale Größe genau beim Grenzwinkel der Totalreflexion hat. Diese Diskrepanz zwischen Experiment und Theorie ist bisher nicht geklärt worden, denn auch die sehr sorgfältigen Messungen von Cl. Schaefer und G. Gross<sup>3)</sup> mit elektrischen Wellen an Paraffinprismen, bringen keine Klärung, da nur bei dem festen Einfallswinkel von  $45^\circ$  beobachtet wurde, während der Grenzwinkel bei etwa  $41^\circ$  lag. Für den Spezialfall  $45^\circ$  fanden die Verfasser allerdings gute Übereinstimmung mit der Theorie.

Zweck dieser Arbeit ist es, durch photographisch-photometrische Messungen mit einer ähnlichen Anordnung wie bei Quincke zu

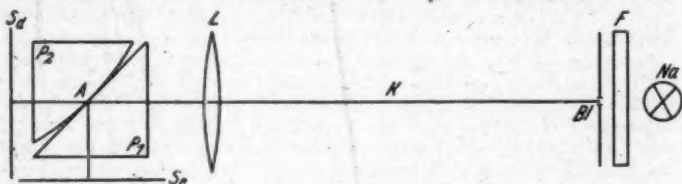


Abb. 1

zeigen, daß die von Voigt und später auch von Eichenwald<sup>4)</sup> gegebene Theorie in allen Einzelheiten bestätigt werden kann. Darüber hinaus konnte noch gezeigt werden, daß zur mathematischen Beschreibung des Phänomens die einfachen Interferenzformeln ausreichen, Formeln wie sie im Gebiet der partiellen Reflexion, also im Gebiet der Newtonschen Ringe, allgemein angewendet werden und durch geeignete Umformung auch an der Grenze selbst und über die Grenze hinaus, also im Gebiet der Totalreflexion gültig bleiben. Diese so modifizierten Interferenzformeln erweisen sich, wie wohl selbstverständlich, als identisch mit den aus der allgemeinen Maxwell'schen Theorie abgeleiteten Gleichungen.

## § 2. Die Apparatur

In Abb. 1 bedeutet Na eine Natriumdampflampe, F ein Kaliumbichromatfilter, durch welches das Natriumlicht der Wellenlänge  $589,3\mu\mu$  ausgesiebt wurde. Dieses Licht durchsetzte den Kollimator K,

1) E. E. Hall; Phys. Rev. 15. S. 73. 1902.

2) W. Voigt, Göttinger Nachr. S. 149. 1884.

3) Cl. Schaefer u. G. Gross, Ann. d. Phys. 32. S. 648. 1910.

4) A. Eichenwald; Journ. d. Russ. Chem. Phys. Ges. 41. Phys. Teil S. 131. 1909.



bestehend aus einer kreisförmigen Lochblende  $Bl$  von 0,5 mm Durchmesser und aus einer Kollimatorlinse  $L$  von 250 mm Brennweite. Die Öffnung des Lichtbündels betrug somit 7'. Bei einigen Versuchen wurde auch mit einem Lochdurchmesser von 0,1 mm gearbeitet, entsprechend einer Büschelöffnung 1,3'. Dieses schwach geöffnete Lichtbündel fiel auf die beiden Prismen  $P_1$  und  $P_2$ , die auf einem Spektrometertisch drehbar aufgestellt waren. Die Drehung war auf 0,5' genau ablesbar. Das Prisma  $P_1$  hatte eine plane Hypotenusenfläche von  $4 \times 4 \text{ cm}^2$ , das Prisma  $P_2$  eine schwach konvex gekrümmte mit einem Krümmungsradius von 6,35 m. Die dazwischenliegende Luftlamelle wurde von einem Teil des auffallenden Lichtes durchsetzt und dieses auf der photographischen Schicht  $S_d$  aufgefangen; der andere Teil des Lichtes wurde an der Luftlamelle reflektiert und auf der photographischen Schicht  $S_r$  aufgefangen.

Zunächst wurden die beiden Prismen mit sanftem Druck aufeinandergedrückt, sodann der Druck fortgenommen; die Prismen klebten dann an der Stelle  $A$  in gut reproduzierbarer Weise aneinander.

Der Brechungsindex der Glasprismen betrug 1,5161, und der entsprechende Grenzwinkel der Totalreflexion lag bei  $41^\circ 16'$ .

Die photographischen Aufnahmen  $S_d$  und  $S_r$  des Phänomens als Schattenbild erfolgten gleichzeitig auf feinkörnigem Agfa-Film und wurden mit Feinkorn-Entwickler entwickelt. Mit gleicher Expositionszeit wurden ferner mit dem Zeiss-Stufenblenden-Kondensor mit Na-Licht Intensitätsmarken gedruckt. Somit konnte das Phänomen intensitätsmäßig als Funktion des Abstandes vom Berührungspunkt  $A$  mit dem registrierenden Mikrophotometer ermittelt werden.

### § 3. Eichung der Dicke der Luftlamelle

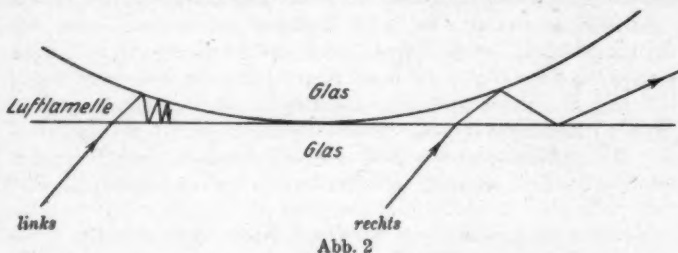
Um nun aus den Abständen vom Berührungspunkt  $A$  die jeweilige Dicke der Luftlamelle zu ermitteln, wurden zunächst im Gebiet der partiellen Reflexion die hier auftretenden Newtonschen Ringe mit ihrer bekannten Intensitätsverteilung sowohl im durchgehenden wie im reflektierten Licht photographisch-photometrisch vermessen. Die Intensitäten homologer Stellen der beiden Aufnahmen ergänzten sich dabei innerhalb der Meßfehlergrenze (einige Prozent der Maximalintensität) zu dieser Maximalintensität, was ein ausgezeichnete Beweis für das einwandfreie Arbeiten der ganzen Apparatur war. Diese Dickeneichung der Luftlamelle ergab, daß die Berührungsfläche nicht punktförmig war, sondern in einer sehr kleinen kreisförmigen Berührungsfläche erfolgte, ein Zeichen dafür, daß die Prismen, wie schon oben erwähnt, leicht aneinanderklebten. Die Dicke der Luftlamelle variierte von Null Millimeter innerhalb dieser kleinen Berührungsfläche

bis zu etwa 0,01 mm am Rande des Feldes. Sie konnte für jede Stelle mit einer Genauigkeit von etwa  $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ mm} \sim \frac{1}{30}$  Wellenlänge ermittelt werden.

#### § 4. Beschreibung des Phänomens beim Übergang von partieller zu totaler Reflexion

Es wurde beobachtet mit der engen Kollimatorlochblende von 0,1 mm Durchmesser (vgl. Abb. 1) entsprechend einer Bündelöffnung von 1,3'.

Betrachtet man das Phänomen im Gebiet der partiellen Reflexion im reflektierten monochromatischen Licht ( $\lambda = 589 \mu\mu$ ), so sieht man das Gesichtsfeld durchzogen von den bekannten dunklen Newtonschen Ringen, in deren Zentrum ein dunkler Fleck liegt. Dreht man jetzt die ganze Prismenanordnung so, daß man sich dem



Grenzwinkel der Totalreflexion nähert, so quellen die Ringe nach außen, und der Zentralfleck wird größer. Der Fleck ist für das Auge relativ scharf geschnitten und reicht bis zu einer Lamellendicke von etwa  $2\lambda$  (entsprechend einem Durchmesser von 8 mm bei der hier gewählten Anordnung). Etwa 5' vor der Grenze der Totalreflexion sind die Newtonschen Ringe schon so groß geworden, daß nur wenige im Gesichtsfeld zu sehen sind. Sie sind eigenartig diffus geworden und befinden sich in Auflösung und zwar erfolgt die Auflösung unsymmetrisch, rechts früher als links (vgl. Abb. 2). Das rührt daher, daß bei dem hier schon sehr streifenden Eintritt des Lichtes in die Luftlamelle die „Keilwirkung“ bei den Mehrfachreflexionen an dieser Luftlamelle sich merklich auswirkt. Genau an der Grenze der Totalreflexion, wenn also das Licht „streifend“ in die Luftlamelle eintritt, sind die Newtonschen Ringe vollständig verschwunden. Das Eindrucksvollste an dieser Beobachtung ist aber das, daß der Zentralfleck vollständig unverändert in Größe und Aussehen geblieben ist und es auch bleibt, wenn man die Grenze der Totalreflexion um etwa  $1^\circ$  überschreitet. Erst tiefer im Gebiet

der Totalreflexion nimmt die Fleckgröße ab, bei etwa  $10^\circ$  über den Grenzwinkel hinaus ist sein Durchmesser auf die Hälfte herabgesunken (Näheres vgl. § 5).

Die ganze Erscheinung weist somit mit großer Eindringlichkeit darauf hin, daß der Zentralfleck, ebenso wie derselbe im Gebiet der Newtonschen Ringe eine reine Interferenzerscheinung ist, so auch an der Grenze selbst und hinter der Grenze im Gebiet der Totalreflexion ein Interferenzphänomen bleibt, und auch als solches mathematisch behandelt werden kann, wie das in § 6 näher ausgeführt werden wird.

Bei dieser Betrachtungsweise ergibt sich also das ganz Auffallende, daß beim Grenzwinkel der Totalreflexion, obwohl man sagt, daß der Energiefluß im dünneren Medium parallel zur Grenzfläche verläuft (so daß keine Interferenzen entstehen können), die Wirkung dennoch so ist, als wenn derselbe die Luftlamelle steil durchsetzt, derart, daß sich alle Mehrfachreflexionen und somit die Interferenzerscheinungen völlig regulär ausbilden können. Der Grund, warum jetzt keine Newtonschen Ringe zu sehen sind, liegt darin, daß an der Grenze der Totalreflexion ihre Durchmesser unendlich groß geworden sind. Aus der periodischen Funktion der Intensitätsverteilung vor der Grenze ist eine nichtperiodische hinter der Grenze geworden.

#### § 5. Die photographisch-photometrischen Meßergebnisse

In den folgenden Tabellen sind die Ergebnisse der photographisch-photometrischen Messungen gegeben. In den Tabellen 1a—7a bedeutet in Spalte 2  $D^*$  die Intensität des Zentralfleckes im durchgegangenen Licht als Funktion der Dicke  $d$  der Luftlamelle, die jeweils in Spalte 1 der Tabellen in Einheiten der benutzten Wellenlänge ( $\lambda = 589 \mu\mu$ ) mitgeteilt ist. Entsprechend in den Tabellen 1b—7b bedeutet  $R^*$  die Intensität des Zentralfleckes im reflektierten Licht.

Die Summe  $D^* + R^*$  ist innerhalb der Meßfehlergrenze für jeden Wert von  $d$  eine Konstante. Sie wird innerhalb der Tabellen 1—7 im Mittel für alle  $d$ -Werte = 100 gesetzt. Die einzelnen Werte  $D^*$  und  $R^*$  sind also in Prozenten dieses Mittelwertes angegeben. Die Meßgenauigkeit ist auf 1% des Mittelwertes geschätzt und wird nur selten 5% überschreiten.

Außerdem sind noch jeweils in Spalte 3 die Werte  $D$  und  $R$  gegeben, entsprechend den in § 6 gegebenen Gleichungen 11 und 12. Es ist wie selbstverständlich streng  $D + R = 100\%$ . Die Spalten 4 enthalten die Differenzen Beobachtung-Rechnung, also  $D^* - D$  bzw.  $R^* - R$ .

Wie man sieht überschreiten sie nur an einzelnen Stellen die Meßfehlergrenze von 5% mit leichter Tendenz zu systematischen

Abweichungen, die nicht näher geklärt werden konnte, aber doch wohl in den Schwierigkeiten des photographisch-photometrischen Meßverfahrens zu suchen ist. Tab. 1a und 1b beziehen sich auf den Grenzwinkel der Totalreflexion  $\varphi_G = 41^\circ 16'$ , Tab. 2a und 2b gelten entsprechend für  $\varphi = 41^\circ 18'$  d. h. 2' jenseits der Grenze, Tab. 3a und 3b gelten entsprechend für  $\varphi = 41^\circ 21'$  d. h. 5' jenseits der Grenze, Tab. 4a und 4b für  $\varphi = 41^\circ 26'$  d. h. 10' jenseits der Grenze, „ 5a „ 5b „  $\varphi = 42^\circ 16'$  d. h. 1° „ „ „ , „ 6a „ 6b „  $\varphi = 46^\circ 40'$  d. h. 5,4° „ „ „ , Tab. 7a und 7b entsprechend für  $\varphi = 51^\circ 15,5'$  d. h. 10° jenseits der Grenze.

Tabelle 1a und 1b

$$\varphi_G = 41^\circ 16'$$

$d/\lambda$	$D^*$ %	$D$ %	$D^*-D$ %	$d/\lambda$	$R^*$ %	$R$ %	$R^*-R$ %
0,05	97,0	98,4	- 1,4	0,05	2,5	1,6	+ 0,9
0,1	93,2	93,2	0,0	0,1	6,2	6,8	- 0,6
0,2	80,3	78,7	+ 1,6	0,2	15,5	21,3	- 5,8
0,4	57,0	52,5	+ 4,5	0,4	41,0	47,5	- 6,5
0,6	39,5	35,6	+ 3,9	0,6	59,6	64,4	- 4,8
0,8	26,5	25,0	+ 1,5	0,8	74,1	75,0	- 0,9
1,0	17,0	18,2	- 1,2	1,0	83,5	81,8	+ 1,7
1,2	12,0	13,7	- 1,7	1,2	86,4	86,3	+ 3,0
1,4	9,0	10,6	- 1,6	1,4	92,2	89,4	+ 2,8
1,6	7,0	8,4	- 1,4	1,6	94,0	91,6	+ 2,4
2,0	5,0	5,6	- 0,6	2,0	96,5	94,4	+ 2,1
2,5	3,0	3,7	- 0,7	2,5	97,8	96,3	+ 1,5
2,8	2,5	3,0	- 0,5	2,8	98,0	97,0	+ 1,0

Tabelle 2a und 2b

$$\varphi = 41^\circ 18'$$

$d/\lambda$	$D^*$ %	$D$ %	$D^*-D$ %	$d/\lambda$	$R^*$ %	$R$ %	$R^*-R$ %
0,05	99,0	98,4	+ 0,6	0,05	1,0	1,6	- 0,6
0,1	96,0	93,1	+ 2,9	0,1	3,5	6,9	- 3,4
0,2	84,0	78,6	+ 5,4	0,2	15,5	21,4	- 5,9
0,4	56,6	52,4	+ 4,2	0,4	43,5	47,6	- 4,1
0,6	36,0	35,3	+ 0,7	0,6	61,5	64,7	- 3,2
0,8	24,0	24,6	- 0,6	0,8	75,5	75,4	+ 0,1
1,0	17,5	17,7	- 0,2	1,0	85,0	82,3	+ 2,7
1,2	11,7	13,3	- 1,6	1,2	91,9	86,7	+ 5,2
1,4	8,6	10,3	- 1,7	1,4	95,0	89,7	+ 5,3
1,6	7,1	8,2	- 1,1	1,6	97,1	91,8	+ 5,3
2,0	4,7	5,4	- 0,7	2,0	99,0	94,6	+ 4,4
2,5	3,1	3,3	- 0,2	2,5	100,0	96,7	+ 3,3
2,8	2,8	2,6	+ 0,2	2,8	100,0	97,4	+ 2,6

Tabelle 3a und 3b

$$\varphi = 41^{\circ} 21'$$

$d/\lambda$	$D^*$ %	$D$ %	$D^* - D$ %	$d/\lambda$	$R^*$ %	$R$ %	$R^* - R$ %
0,05	99,0	98,4	+ 0,6	0,05	1,0	1,6	- 0,6
0,1	97,6	93,1	+ 4,5	0,1	4,0	6,9	- 2,9
0,2	84,0	78,4	+ 5,6	0,2	16,9	21,6	- 4,7
0,4	57,5	52,2	+ 5,3	0,4	37,5	47,8	- 10,3
0,6	38,2	35,1	+ 3,1	0,6	57,2	64,9	- 7,7
0,8	25,0	24,2	+ 0,8	0,8	69,0	75,8	- 6,8
1,0	17,2	17,4	- 0,2	1,0	79,1	82,6	- 3,5
1,2	10,0	13,1	- 3,1	1,2	88,0	86,9	+ 1,1
1,4	7,2	9,1	- 1,9	1,4	92,9	90,9	+ 2,0
1,6	5,5	7,5	- 2,0	1,6	95,0	92,5	+ 2,5
2,0	4,0	5,0	- 1,0	2,0	95,5	95,0	+ 0,5
2,5	3,0	2,8	+ 0,2	2,5	98,6	97,2	+ 1,4
2,8	2,0	2,1	- 0,1	2,8	99,5	97,9	+ 1,4

Tabelle 4a und 4b

$$\varphi = 41^{\circ} 28'$$

$d/\lambda$	$D^*$ %	$D$ %	$D^* - D$ %	$d/\lambda$	$R^*$ %	$R$ %	$R^* - R$ %
0,05	96,0	98,3	- 2,3	0,05	2,2	1,7	+ 0,5
0,1	93,0	93,1	- 0,1	0,1	6,0	6,9	- 0,9
0,2	83,0	78,3	+ 4,7	0,2	16,0	21,7	- 5,7
0,4	57,0	51,9	+ 5,1	0,4	40,9	48,1	- 7,2
0,6	36,3	34,9	+ 1,4	0,6	62,6	67,1	- 4,5
0,8	23,3	23,7	- 0,4	0,8	79,7	76,3	+ 3,4
1,0	15,9	16,8	- 0,9	1,0	89,0	83,2	+ 5,8
1,2	10,9	12,0	- 1,1	1,2	93,0	88,0	+ 5,0
1,4	7,8	9,0	- 1,2	1,4	94,5	91,7	+ 2,8
1,6	5,4	6,7	- 1,3	1,6	95,8	93,3	+ 2,5
2,0	3,8	4,0	- 0,2	2,0	97,0	96,0	+ 1,0
2,5	2,3	2,2	+ 0,1	2,5	97,2	97,8	- 0,6
2,8	2,0	1,5	+ 0,5	2,8	97,2	98,5	- 1,3

Aus den Tabellen geht klar hervor, daß der Fleck seine maximale Größe direkt an der Grenze der Totalreflexion hat, wie es auch die Theorie fordert.

Ein erhebliches Größerwerden dicht hinter der Grenze, wie es Quick und auch Hall beobachtet haben, tritt nicht auf. Es wird bei diesen Forschern, die mit dem Auge beobachteten, in Meßfehlern physiologischer Art zu suchen sein.

Tabelle 5a und 5b

 $\varphi = 42^\circ 16'$ 

$d/\lambda$	$D^*$ %	$D$ %	$D^*-D$ %	$d/\lambda$	$R^*$ %	$R$ %	$R^*-R$ %
0,05	98,2	98,1	+ 0,1	0,05	3,0	1,9	+ 1,1
0,1	93,1	92,7	+ 0,4	0,1	6,5	7,3	- 0,8
0,2	80,0	76,8	+ 3,2	0,2	15,4	23,2	- 7,8
0,4	52,0	48,3	+ 3,7	0,4	43,2	51,7	- 8,5
0,6	31,5	28,4	+ 3,1	0,6	65,0	71,6	- 6,6
0,8	19,8	16,5	+ 3,3	0,8	79,0	83,5	- 4,5
1,0	13,1	10,2	+ 2,9	1,0	86,9	89,8	- 2,9
1,2	9,5	6,0	+ 3,5	1,2	93,0	94,0	- 1,0
1,4	6,6	3,7	+ 2,9	1,4	97,0	96,3	+ 0,7
1,6	5,5	3,0	+ 2,5	1,6	98,4	97,0	+ 1,4
2,0	3,5	0,8	+ 2,7	2,0	100,0	99,2	+ 0,8
2,5	2,0	0,2	+ 1,8	2,5	100,0	99,8	+ 0,2
2,8	1,0	0,1	+ 0,9	2,8	100,0	99,9	+ 0,1

Tabelle 6a und 6b

 $\varphi = 46^\circ 39,5'$ 

$d/\lambda$	$D^*$ %	$D$ %	$D^*-D$ %	$d/\lambda$	$R^*$ %	$R$ %	$R^*-R$ %
0,05	95,5	97,1	- 1,6	0,05	5,0	2,9	+ 2,1
0,1	82,0	88,7	- 6,7	0,1	17,8	11,3	+ 6,5
0,2	59,9	65,3	- 5,4	0,2	40,0	34,7	+ 5,3
0,4	22,0	26,5	- 4,5	0,4	78,2	73,5	+ 4,7
0,6	5,5	10,6	- 5,1	0,6	94,9	89,4	+ 5,5
0,8	2,0	0,8	+ 1,2	0,8	99,9	99,2	+ 0,7

Tabelle 7a und 7b

 $\varphi = 51^\circ 15,5'$ 

$d/\lambda$	$D^*$ %	$D$ %	$D^*-D$ %	$d/\lambda$	$R^*$ %	$R$ %	$R^*-R$ %
0,05	93,0	95,6	- 2,6	0,05	8,5	4,4	+ 4,1
0,1	76,0	83,7	- 7,7	0,1	23,0	16,3	+ 6,7
0,2	42,0	52,3	- 10,3	0,2	56,0	47,7	+ 8,3
0,4	7,0	13,3	- 6,3	0,4	88,9	86,7	+ 2,2
0,6	0,0	2,9	- 2,9	0,6	102,0	97,1	+ 4,9

#### § 6. Mathematische Formulierung der Erscheinung als Interferenz-Phänomen

Da der zentrale Fleck vom Gebiet der partiellen Reflexion in das Gebiet der Totalreflexion, wie schon in § 4 angeführt, praktisch unverändert blieb; also anzunehmen ist, daß es sich auch hier um ein Interferenzphänomen handelt, wird versucht, es mit demselben Ausdruck mathematisch zu erfassen wie vor der Grenze, obgleich nach



Überschreiten der Grenze die Reflexionskoeffizienten und der Gangunterschied komplex werden. Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

- $\varphi$  = Einfallswinkel im Glas,  
 $\varphi_0$  = Grenzwinkel der Totalreflexion,  
 $\psi$  = Brechungswinkel in Luft,  
 $n$  = Brechungsexponent von Luft gegen Glas (1,5161),  
 $\tau_s$  = Reflexionskoeffizient des senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Lichtes,  
 $\tau_p$  = Reflexionskoeffizient des parallel zur Einfallsebene polarisierten Lichtes,  
 $R_p$  = Reflektierte Komponente für parallel zur Einfallsebene polarisiertes Licht,  
 $R_s$  = Reflektierte Komponente für senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht,  
 $D_p$  = durchgelassene Komponente des parallel polarisierten Lichtes,  
 $D_s$  = durchgelassene Komponente des senkrecht polarisierten Lichtes, alles in Einheiten der eingefallenen Intensität,  
 $d$  = Dicke der Luftlamelle zwischen den Prismen,  
 $\lambda$  = Wellenlänge in Luft.

Im Gebiet der partiellen Reflexion, also für  $\varphi < \varphi_0$  gilt dann:

$$(1) \quad D_p = \frac{(1 - \tau_p)^2}{(1 - \tau_p)^2 + 4 \tau_p \sin^2 \left\{ \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} \right\}} \quad \left\| \quad R_p = 1 - D_p, \right.$$

$$(2) \quad D_s = \frac{(1 - \tau_s)^2}{(1 - \tau_s)^2 + 4 \tau_s \sin^2 \left\{ \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} \right\}} \quad \left\| \quad R_s = 1 - D_s, \right.$$

$$(3) \quad \tau_p = \left( \frac{\operatorname{tg}(\psi - \varphi)}{\operatorname{tg}(\psi + \varphi)} \right)^2$$

und

$$(4) \quad \tau_s = \left( \frac{\sin(\psi - \varphi)}{\sin(\psi + \varphi)} \right)^2.$$

An der Grenze ist  $\psi = 90^\circ$  und nach Überschreiten der Grenze, da dann  $\sin \psi = n \sin \varphi > 1$ , nicht erklärt.  $\tau_p$  und  $\tau_s$  werden mit Hilfe trigonometrischer Formeln umgeformt und  $\cos \psi$  durch  $\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi}$  ausgedrückt. Es ergibt sich

$$\tau_p = \frac{\cos^2 \varphi + n^2 - n^4 \sin^2 \varphi - 2n \cos \varphi \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi + n^2 - n^4 \sin^2 \varphi + 2n \cos \varphi \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi}},$$

und damit

$$(5) \quad D_p = \frac{4n^2 \cos^2 \varphi (1 - n^2 \sin^2 \varphi)}{4n^2 \cos^2 \varphi (1 - n^2 \sin^2 \varphi) + (n^4 + \cos^4 \varphi + n^2 \sin^4 \varphi - 2n^2 \sin^2 \varphi + 2n^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - 2n^2 \cos^2 \varphi) \cdot \sin^2 \left\{ \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} \right\}},$$

und nach entsprechender Umformung für  $\tau_s$ .

$$(6) D_s = \frac{4n^2 \cos^2 \varphi (1 - n^2 \sin^2 \varphi)}{4n^2 \cos^2 \varphi (1 - n^2 \sin^2 \varphi) + (n^2 - 1)^2 \sin^2 \left\{ \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} \right\}}$$

Diese Ausdrücke gelten zunächst für  $\varphi < \varphi_G$ .

Für  $\varphi = \varphi_G$ , wo die Reflexionskoeffizienten = 1 und der Gangunterschied = 0 sind, ergeben sich:

$$(7) \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_G} D_p = \frac{1}{1 + \frac{n^2 - 1}{n^2} \left( \frac{\pi d}{\lambda} \right)^2}$$

und

$$(8) \quad \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_G} D_s = \frac{1}{1 + (n^2 - 1) \left( \frac{\pi d}{\lambda} \right)^2}$$

Für  $\varphi > \varphi_G$  erhält man mit Benutzung der Beziehung

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

folgende reelle Ausdrücke:

$$(9) \quad D_p = \frac{4n_1^4 \cos^2 \varphi (\sin^2 \varphi - n_1^2)}{4n_1^4 \cos^2 \varphi (\sin^2 \varphi - n_1^2) + \sin^2 u \cdot (1 - n_1^2)^2 (\sin^2 \varphi - n_1^2 \cos^2 \varphi)^2},$$

$$(10) \quad D_s = \frac{4 \cos^2 \varphi (\sin^2 \varphi - n_1^2)}{4 \cos^2 \varphi (\sin^2 \varphi - n_1^2) + \sin^2 u (1 - n_1^2)^2},$$

$$\text{wo } n_1 = \frac{1}{n} \text{ und } u = \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi}{n_1^2} - 1}.$$

$$R_p = 1 - D_p, \quad R_s = 1 - D_s.$$

Hier werden also  $D_p$ ,  $R_p$ ,  $D_s$ ,  $R_s$ , die vor der Grenze periodische Funktionen von  $D$  waren, nichtperiodische Ausdrücke, die identisch mit dem in der Arbeit von Cl. Schaefer und G. Gross verwendeten Ausdrücken für die Intensitätsverteilung sind, die dort aus den Maxwell'schen Gleichungen abgeleitet wurden.

Für das bei der Beobachtung verwendete nichtpolarisierte Licht ergeben sich

$$(11) \quad D = \frac{D_p + D_s}{2}$$

und

$$(12) \quad R = \frac{R_p + R_s}{2}$$

Die beobachteten Werte  $D$  und  $R$ , so auch die nach (11) und (12) berechneten Werte sind in § 5 tabellarisch gegeben.

Hamburg, Physikalisches Staatsinstitut, Juli 1943.

(Eingegangen 20. Juli 1943)

